



وحدّة : المشتقات

الرياضيات

منعده

مع : أحمد هجرس

https://youtube.com/c/saholah?sub_confir

منعده الرياضيات على يوتيوب

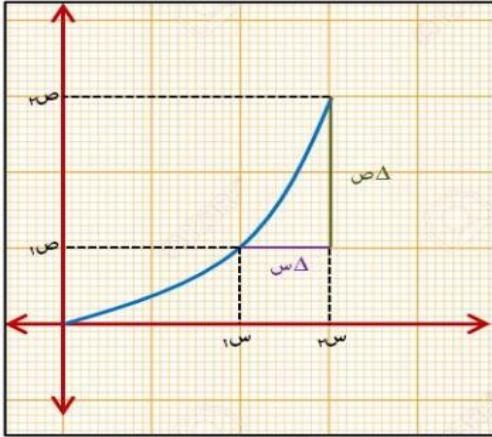


التغير = القيمة الثانية - القيمة الأولى



معدل التغير

$\Delta ه = س = س_2 - س_1 = (س + ه) - س$	التغير في س	
$\Delta ص = ص_2 - ص_1 = د(س_2) - د(س_1) = د(س + ه) - د(س)$	التغير في الدالة	(١)
$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{د(س_2) - د(س_1)}{س_2 - س_1} = \frac{د(س + ه) - د(س)}{س_2 - س_1} = \frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1}$	متوسط معدل التغير	(٢)
$\frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1} = \frac{ص_2 - ص_1}{\Delta س} = \frac{ص_2 - ص_1}{\Delta س}$	معدل التغير	(٣)



$$\frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1} = \frac{\text{التغير في المسافة}}{\text{التغير في الزمن}} = \text{السرعة المتوسطة}$$

$$\frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1} = \frac{\text{التغير في السرعة}}{\text{التغير في الزمن}} = \text{التسارع (العجلة) المتوسطة}$$

أوجد التغير و متوسط معدل التغير و معدل التغير (إن أمكن)

(٢) إذا كان : $د(س) = ٣س + ١$

(١) إذا كان : $د(س) = ٢$

(٤) أوجد معدل التغير للدالة $د(س) = ٩س$

(٣) إذا كان : $د(س) = ٢س - ٤$

تحت
الرياضيات
مع : احمد هجرس

$$(٦) \sqrt{1+3s}$$

$$(٥) \text{ إذا كان : د (س) } = \frac{1+s}{2-s}$$

(٧) استخدم التعريف العام للمشتقة لإيجاد مشتقة د(س) = 7س + |2س - 4| عند س = 2

(٨) طفل ألقى كرة في بركة ماء فكونت موجات دائرية ،

أوجد معدل التغير في مساحة الموجة عندما يتغير نصف قطرها من ٥ سم إلي ٧ سم

(٩) تتمدد صفيحة مربعة الشكل بحيث تظل محتفظة بشكلها. أحسب:

(أ) متوسط معدل التغير في محيطها عندما يتغير طول ضلعها من ١٠ إلى ١٠,١

(ب) معدل التغير في محيطها عندما يكون طول ضلعها ٢٠

$$\left. \begin{array}{l} \text{س} < 1 \\ \text{س} > 1 \end{array} \right\} = \text{د (س)}$$

أوجد متوسط معدل التغير عندما تتغير س من ١ إلى ٣

(١١) إذا كان متوسط معدل تغير د(س) = $\frac{p}{2+s}$ عندما تتغير س من ٠ إلى ٣ يساوي ٢- أوجد p

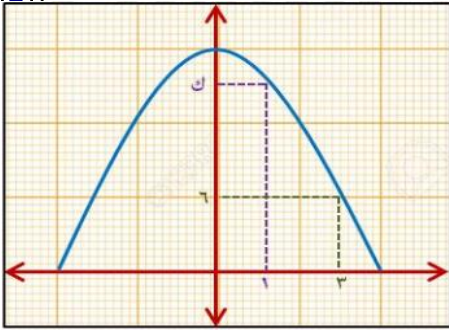
(١٢) إذا كان متوسط معدل تغير د(س) = $2s^2 + 3s$ في [٢، ٣] يساوي ١١ فما قيمة p

(١٣) إذا كانت د(س) دالة في المستوى الاحداثي وكان مقدار التغير في د(س) يساوي ٤ عندما تتغير س من ١ إلى م فإذا علمت أن متوسط معدل التغير في د(س) = ١٦ . اوجد م

(١٤) إذا تحرك جسم في المستوى البياني من النقطة p(س، ٣) إلى النقطة ب(٦، ص) بحيث $\Delta s = ٢$ ، $\Delta v = ٥$ فجد س، ص

(١٥) أوجد متوسط معدل التغير للدالة د(س) = $3 - |س - ٣|$ في الفترة [١، ٢]

(١٦) إذا كانت ص = $[\frac{س}{٤} + ١]$ وتغيرت قيمة س من ١ إلى ١,٥ فأوجد $\frac{\Delta v}{\Delta s}$



(١٧) في الشكل المقابل :
متوسط معدل التغير يساوي ٤- عندما تتغير س من ١ إلى ٣
أوجد قيمة : ك

(١٨) أوجد قمة م ، إذا كان متوسط معدل تغير الدالة هـ(س) في الفترة [١- ، ٤] يساوي ٣ وكانت هـ(١-) = ٢ ، هـ(٤) = ١٣

(١٩) إذا كان متوسط التغير في الدالة فـ(س) في الفترة [١ ، ٣] يساوي ٥ وكان فـ(١) × فـ(٣) = ٢
وكان هـ(س) = $\frac{1}{ف(س)}$ فأوجد متوسط تغير الدالة هـ (س) في الفترة نفسها .

(٢٠) إذا كانت د(س) = $\frac{18}{س}$ وكان س_١ = ٢ ، Δس = ٤ ، فإن متوسط التغير في الدالة يساوي

(٢١) إذا كانت د(س) = $\frac{س^٢}{١+س٢}$ فأوجد متوسط معدل التغير للدالة د(س) عندما تتغير س من ١ إلى ٣,٥

$$١ \leq س < ٣$$

$$س \leq ٣$$

$$س^٢$$

$$١+س٢$$

} إذا كانت د(س) =



د (س) تكون قابلة للاشتقاق عند س = أ إذا كان : $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ نها $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a-h) - f(a)}{-h}$ مع (أ) موجوداً

ملحوظة : إذا كانت الدالة يتغير تعريفها عند س = أ

@ نوجد المشتقة اليمنى : $f'(a^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ نها

@ نوجد المشتقة اليسرى : $f'(a^-) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a-h) - f(a)}{-h}$ نها

الإسنتاج	من الرسم	إذا كان
الدالة قابلة للاشتقاق ، وتكون متصلة	المماس الأيمن نفس المماس الأيسر	$f'(a^+) = f'(a^-)$
الدالة غير قابلة للاشتقاق ، وتكون متصلة أو غير متصلة	المماس الأيمن يختلف عن الأيسر	$f'(a^+) \neq f'(a^-)$

ملحوظة : @ إذا كانت الدالة متصلة : فإنها تكون قابلة للاشتقاق أو غير قابلة .

@ إذا كانت الدالة غير متصلة : فإنها تكون غير قابلة للاشتقاق .

@ لبحث الاشتقاق في [أ ، ب] : # عند أ : نكتفي بالمشتقة اليمنى فقط .

عند ب : نكتفي بالمشتقة اليسرى فقط .

ملاحظات هامة :

(١) مسائل بها مطلق : لابد من إعادة تعريف المطلق وملاحظة الآتي :

الحل	النقطة المطلوب بحث الاشتقاق عندها
نوجد المشتقة اليمنى فقط	تقع يمين أصفار المطلق
نوجد المشتقة اليسرى فقط	تقع يسار أصفار المطلق
نوجد المشتقة اليمنى واليسرى	هي أصفار المطلق

(٢) مسائل بها جذر تربيعي : نوجد أصفار ما تحت الجذر ونلاحظ ما يأتي :

النقطة المطلوب بحث الاشتقاق عندها	الحل مع : الحمد هجرس
تقع يمين أصفار الجذر	نوجد المشتقة اليمنى فقط
تقع يسار أصفار الجذر	الدالة غير معرفة وبالتالي غير قابلة للاشتقاق
هي أصفار الجذر	الدالة غير قابلة للاشتقاق (اذكر السبب)

(٣) مسائل بها دالت الصحيح : نعيد تعريف دالة الصحيح وملاحظة الآتي :

النقطة المطلوب بحث الاشتقاق عندها	الحل
تقع داخل الفترة	نوجد مشتقة الدالة عند هذه النقطة
تقع في أحد طرفي الفترة	الدالة غير متصلة وبالتالي غير قابلة للاشتقاق

(٤) مسائل بها دالت معرفة بأكثر من قاعدة : نلاحظ الآتي :

النقطة المطلوب بحث الاشتقاق عندها	الحل
تقع يمين نقطة التشعب	نوجد المشتقة اليمنى فقط
تقع يسار نقطة التشعب	نوجد المشتقة اليسرى فقط
هي نقطة التشعب	نوجد المشتقة اليمنى واليسرى

$$(١) د (س) = \left. \begin{array}{l} ١ + ٢س \\ ٢س + ٤ \end{array} \right\} \begin{array}{l} ٣ < س \\ ٣ > س \end{array}$$

ابحث قابلية اشتقاق د (س) عند س = ٣

$$(٢) د (س) = \left. \begin{array}{l} ٣ - س \\ ٢س - ٢ \end{array} \right\} \begin{array}{l} ١ \geq س \\ ١ < س \end{array}$$

ابحث قابلية اشتقاق د (س) عند س = ١



$$\left. \begin{array}{l} 1 > s \geq 2 \\ 2 \geq s \geq 1 \end{array} \right\} = (s) \text{ د } \left. \begin{array}{l} s^2 + s + 1 \\ s^3 \end{array} \right\}$$

عند $s = 1$ & $s = 2$ & $s = 3$

.....

(٤) إذا كانت $d(s) = \left. \begin{array}{l} s^2 \\ s + b \end{array} \right\}$ و $s > 1$ قابلة للاشتقاق عند $s = 1$ فأوجد قيمة a & b

.....

(٥) إذا كان $d(s) = |s - 3|$ فابحث قابلية اشتقاقها عند أي نقطة في مجالها

.....

(٦) ابحث قابلية اشتقاق $d(s) = |s - 2| + 3$ عند $s = 2$ ثم ابحث الاتصال .

عند $s = 6$ ، $s = 1$

(٧) ابحث قابلية اشتقاق : د (س) = $\left[\frac{1}{2} s - 1 \right]$

ابحث قابلية اشتقاق د (س) عند أي نقطة في مجالها .

(٨) د (س) = $\sqrt{s + 1}$

ابحث قابلية اشتقاق د (س) عند $s = -2$

(٩) د (س) = $|s + 2| + 1$

تمارين

(١٠) إذا كانت : د (س) = $\left. \begin{array}{l} s^2 - 2s \\ s - s^2 \end{array} \right\}$ $s > 2$ متصلة فأوجد قيمة ب ثم ابحث الاشتقاق $s \leq 2$

(١١) إذا كانت : د (س) = $\left. \begin{array}{l} s + 7 \\ s^2 - 2s \end{array} \right\}$ $s \geq 1$ متصلة فأوجد قيمة ب ثم ابحث الاشتقاق $s < 1$

(٨) إذا كانت : د (س) = $\left. \begin{array}{l} s^2 - 4 \\ s + s \end{array} \right\}$ $s \geq 2$ قابلة للاشتقاق عند $s = 2$ فأوجد أ & ب $s < 2$

(٩) إذا كانت : د (س) = $\left. \begin{array}{l} s^2 + 2 \\ s + 1 \end{array} \right\}$ $s \geq 2$ قابلة للاشتقاق عند $s = 2$ أوجد ك & ب $s < 2$

(١٠) إذا كانت : د (س) = $\left. \begin{array}{l} s^2 + 2 \\ s^2 + s \end{array} \right\}$ $s > 2$ قابلة للاشتقاق عند $s = 2$ & د (٠) = ٢ فأوجد قيمة : أ ، ك ، ب $s \leq 2$

(١١) إذا كانت : د (س) = $\left. \begin{array}{l} s^2 + 2 \\ s^2 + s \end{array} \right\}$ $s > 2$ قابلة للاشتقاق مرتين عند $s = -2$ فأوجد أ & ك & ب $s \leq 2$



المشتقة الأولى = المعامل التفاضلي الأول = ميل المماس = مشتقة ص بالنسبة لـ س

ظل الزاوية التي يصنعها المماس للمنحني مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

$$1 = \frac{ص}{س} \Big|_{س=1} = \frac{ص}{س} = (د س) = (د س) \frac{ص}{س} = \frac{ص}{س}$$

$$\frac{ص}{س} = (د س) = (د س) \frac{ص}{س} = \frac{ص}{س}$$



توضيح	التفاضل	الدالة
مشتقه الثابت = صفر	صفر	أ
مشتقة س = معامل س	أ	أس
ننزل الأس ونطرح منه واحد	ن س ن - 1	س ن
مشتقه ثابت × دالة = الثابت × مشتقة الدالة	أ ن س ن - 1	أس ن
	ن (...)	ن (...)
مشتقة ما تحت الجذر × 2 الجذر		الجذر التربيعي
الأولي × مشتقة الثانية + الثانية × مشتقة الأولى	د × هـ + هـ × د	د × هـ
المقام × مشتقة البسط - البسط × مشتقة المقام المقام ²		د هـ

@ يفضل وضع الدالة علي الصورة : ص =

@ مشتقة المجموع الجبري لدالتين أو أكثر = مجموع مشتقات هذه الدوال .

@ لإيجاد مشتقة الدالة الجذرية نحولها أولاً إلى دالة أسية .

@ لرفع مقدار من المقام للبسط : نغير إشارة أس المقدار .

دليل الجذر مقام الأس

أوجد المشتقة الأولى لكل مما يأتي :

$$(1) \text{ ص } 3 = 2 \text{ ص } 2 + 7 - \frac{5}{2 \text{ ص}} - \sqrt[3]{\text{ص}} + \sqrt[3]{\text{ص}^3}$$

$$(2) \text{ ص } 7 = \text{ص}^2 - \text{ص} + 5$$

$$(3) \text{ ص } 2 = \text{ص}^3$$

$$(4) \text{ ص } 3 = 2 (\text{ص} + 3)^2$$

$$(5) \text{ ص } (7 + \text{ص}^2) = \text{ص}^0$$

$$(6) \text{ ص } 9 = (5 \text{ ص}^2 - 6 \text{ ص} + 4)^8$$

$$(7) \text{ ص } 3 = (1 + \text{ص}^2)^{-1}$$

$$(8) \text{ ص } (3 - \text{ص}^2) = \text{ص}^2 - 2$$

$$(9) \text{ ص } 4 = \frac{7}{\sqrt[4]{(3 - \text{ص}^5)}}$$

$$(10) \text{ ص } 5 = \frac{5}{6(2 - \text{ص}^3)}$$

$$(11) \text{ ص } 7 = \left(\frac{3 + \text{ص}^5}{7 - \text{ص}^2} \right)^{-1}$$

$$(12) \text{ ص } 5 = \left(\frac{3 + \text{ص}^5}{7 - \text{ص}^2} \right)^5$$

$$(13) \text{ ص } (7 - \text{ص}^4) = (\text{ص}^3 + 3 \text{ ص}) (7 - \text{ص}^4)$$

$$(14) \text{ ص } (3 - \text{ص}^5) = (1 + \text{ص}^2) (3 - \text{ص}^5)$$

$$(15) \text{ ص } 4 = (\text{ص}^3 + 5) (5 + \text{ص}^2)$$

$$(16) \text{ ص } (5 - \text{ص}^2) = (\text{ص}^3 + 7) (2 - \text{ص}^5)$$

$$(17) \text{ ص } = (1 + 2س)^3 (2 - س)^2$$

$$(18) \text{ ص } = (1 + 2س)^2 (2 - س)^2$$

$$(19) \text{ ص } = (1 + \sqrt{س})^2 (1 - \sqrt{س})^2$$

$$(21) \text{ ص } = \frac{3 + 2س^2}{7 - س^2}$$

$$(20) \text{ ص } = \frac{5 + 2س^2}{2 - 3س}$$

$$(23) \text{ ص } = \frac{7(3 + 5س)}{7(7 - 2س)}$$

$$(22) \text{ ص } = \frac{5س^2 + 3س}{7 + 2س^2}$$

$$(25) \text{ ص } = \frac{(3 + 5س)(1 + س)}{(7 - 2س)}$$

$$(24) \text{ ص } = \frac{5(3 + 5س)}{7(7 - 2س)}$$

فأثبت أن : ص' = 1

(26) إذا كانت : (ص - س) = 7

(27) إذا كان : ق ، ك دالتين قابلتين للإشتقاق ، وكان : هـ = (س) ، ق = (س) ، ك = (س) ،

وكان : ق = (2) = 4 ، ق' = (2) = 1 ، ك = (2) = 3 ، ك' = (2) = 2 - ، فأوجد هـ' (2)

متعة الرياضيات

أوجد: د (١-)، د (٤)، د (٨)، د (١)، د (٦) مع : احمد هجرس

$s > 1$
 $s \geq 1$
 $s \leq 6$

$s^3 - 2$
 $s^2 - 6$
 s^5

(٢٨) إذا كانت د(س) =

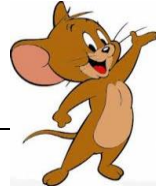
(٢٩) إذا كان د(س) = $s^2 + 2s$ ، وكان د (٢) = ٣٠ . أوجد قيمة s

(٣٠) إذا كان $s^2 + 5s + b = 0$ ، وكان $s = 3$ ، $s = 7$. أوجد قيمة b ،

(٣١) إذا كان $s = 1$ ، $s = 6$ ، $s = 4$ ، $s = 2$ فأوجد : $(\sqrt{s+1})$

(٣٢) إذا كان $s = 1$ ، $s = 3$ ، $s = 2$ ، $s = 5$ ، $s = 2$ فأوجد : $(\frac{s}{h})$

(٣٣) إذا كان $s = 2$ ، $s = 3$ ، $s = 4$ ، $s = 1$ فأوجد : $(s \cdot h)$



خطوات الحل هجرس	المطلوب	
(١) نوجد المشتقة (٢) نعوض عن قيمة س كما الجدول	أوجد ميل المماس للمنحنى : ص = ٠.٠٠	(١)
(١) نوجد المشتقة . (٢) نعوض عن قيمة س كما بالجدول . (٣) نوجد SHIFT TAN للناتج بالموجب . وإذا كان العدد سالب نطرح الزاوية من ١٨٠°	أوجد قياس الزاوية التي يصنعها المماس للمنحنى ص = ٠.٠٠ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات	(٢)
س = ١ ص = ١ ميل المماس = من رقم (١) ميل العمودي = مقلوب الميل بإشارة مخالفة	أوجد معادلة المماس والعمودي عليه $\text{ميل المماس} = \frac{\text{ص} - \text{ص}_1}{\text{س} - \text{س}_1}$	(٣)

جدول يوضح طريقة إيجاد قيمة س حسب المعلومة المعطاة .

خطوات الحل	المعطيات
نعوض عن قيمة : س = ١	عند س = ١
نعوض عن قيمة : س = ٤	عند النقطة (٤ ، ٥)
نعوض عن قيمة س = ٠	عند نقطة الأصل
نعوض عن قيمة : س = ٠	عند نقطة تقاطعه مع محور الصادات
نضع الدالة الأصلية = صفر لنوجد قيم س	عند نقطة تقاطعه مع محور السينات
نحل معادلة المنحني مع معادلة المستقيم لنوجد قيم س	عند نقطة تقاطعه مع المستقيم ٠.٠٠

الاستفادة	المعلومة
ميل الأول = ميل الثاني	المستقيمان متوازيان
ميل الأول = مقلوب ميل الثاني بإشارة مخالفة	المستقيمان متعامدان
(١) ميل المستقيم = ميل المماس للمنحنى (٢) نقطة التقاطع تحقق معادلة المستقيم وتحقق معادلة المنحني	المستقيم يمس المنحنى

خطوات الحل هجرس	المطلوب	
(١) نوجد المشتقة (٢) نضع المشتقة = عدد كما بالجدول (٣) نحل المعادلة لإيجاد قيمة س	أوجد قيمة س التي يكون عندها ميل المماس للمنحنى ص = ٠.٠٠	(١)
(١) نوجد المشتقة (٢) نضع المشتقة = كما بالجدول (٣) نحل المعادلة لنوجد س = ؟ (٤) نعوض في المعادلة الأصلية لنوجد قيمة ص ∴ النقطة = (س ، ص)	أوجد النقطة الواقعة على المنحنى : ص = ٠.٠٠ ويكون عندها	(٢)

جدول يوضح طريقة إيجاد قيمة المشتقة حسب المعلومة المعطاة .

قيمة المشتقة	المعطيات
نضع المشتقة = ٦	ميل المماس مساوياً ٦
نضع المشتقة = صفر	يوازي محور السينات
نضع المشتقة = $\frac{1}{0}$	يوازي محور الصادات
نضع المشتقة = $\frac{2}{3}$	يوازي المستقيم ٢ س + ٣ ص = ١
نضع المشتقة = $\frac{3}{2}$	عمودي على المستقيم ٢ س + ٣ ص = ١
نضع المشتقة = ظا ٥ °	يصنع زاوية ٥ ° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات
نضع المشتقة = $\frac{ص٢ - ١ص}{س٢ - ١س}$	يمر بالنقطتين (،) ، (،)

@ النقطة تقع على المنحنى إذا كانت تحقق معادلته .

@ الميل الموجب (المشتقة < ٠) : يصنع زاوية (حادة) مع الاتجاه الموجب لمحور السينات .

@ الميل السالب (المشتقة > ٠) : يصنع زاوية (منفرجة) مع الاتجاه الموجب لمحور السينات .

(١) أوجد ميل المماس لمنحنى الدالة $D(s) = s^2 - 1$ عند $s = 1$

ثم أوجد قياس الزاوية التي يصنعها المماس للمنحنى مع الإتجاه الموجب لمحور السينات عند النقطة $(1, 0)$ مع : أحمد هجرس

(٢) إذا كان المستقيم المار بالنقطتين $(2, 0)$ ، $(6, 2)$ ممس المنحنى $D(s) = s^2 + 2s - 1$ عند $s = 2$ ، فما قيمة P ؟

(٣) اثبت أن المماس للمنحنى $v = \frac{s^9}{s-1}$ عند النقطة $(2, -6)$ يكون عمودياً على المستقيم $s + 5v = 11$

(٤) أوجد قيمة : A ، B التي تجعل المماس لمنحنى الدالة $P(s) = s^3 + B s + 3$ عند النقطة $(-1, 4)$ يصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{4}$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

(٥) إذا كان منحنى الدالة $v = P(s) = s^2 + B s + 3$ يمر بالنقطة $(2, 7)$ والمماس للمنحنى عند $s = \frac{1}{P}$ يوازي محور السينات أوجد قيمة P ، B

(٦) إذا كان ميل المماس للمنحنى $v = s^2 + \frac{P}{s}$ عند النقطة $(4, v)$ يساوي 7 أوجد قيمة P

منعذ الرياضيات



مع: الحمد للهِ
التقويم

(٧) إذا كان المستقيم : س + ص = ٣ يمس المنحنى : ص = أ س^٢ + ب س^٢ - ٢ س + ٦ عند النقطة (٢ ، ١) فما قيمة أ ، ب ؟

عند النقطة (٢ ، ١) فما قيمة أ ، ب ؟

(٨) إذا كان المستقيم : ١٣ س - ص = ٧ يمس المنحنى : ص = أ س^٢ + ب س^٢ عند النقطة (٦ ، ١) فما قيمة أ ، ب ؟

عند النقطة (٦ ، ١) فما قيمة أ ، ب ؟

(٩) إذا كان قياس الزاوية بين المنحنى : ص = أ س^٢ + ب س^٢ - ٢ س + ١ والاتجاه الموجب لمحور السينات عند النقطة (١ ، - ٣) الواقعة عليا هي ١٣٥° فأوجد أ ، ب

والاتجاه الموجب لمحور السينات عند النقطة (١ ، - ٣) الواقعة عليا هي ١٣٥° فأوجد أ ، ب



(١٠) أوجد معادلة المماس والعمودي عليـة للمنحنى : ص = ٥س^٢ + ٢س عند النقطة (٣، ٤) متعرج

.....

(١١) أوجد معادلة كل من المماس والعمودي عليـة للدالة : د (س) = ٣س^٣ - ٢٧ عند نقطة تقاطعه مع محور السينات .

.....

(١٢) أوجد معادلة المماس للمنحنى : د (س) = (س^٢ + ٢س) عند س = ١

.....

(١٣) أوجد معادلة المماس للدالة : د (س) = ٢س^٢ - ٦س + ٥ والذي يعامد المستقيم : ٢ص - س = ١

.....

(١٤) أوجد معادلتى المماس والعمودي على المنحنى : ص = $\frac{3+s}{1+s}$ عند النقطة (١، ٢)

.....

(١٥) أوجد معادلة كل من المماس والعمودي عليـة للدالة : د (س) = $\sqrt{3+s}$ عند النقطة التي يكون المماس عندها يوازى المستقيم : س - ٤ص + ١٣ = صفر

١٦) أوجد النقط التي تقع على المنحنى : $ص = س^2 - ٣س + ١$ ويكون المماس عندها // المستقيم $ص = ٣س + ٥$



.....

١٧) أوجد النقط الواقعة على المنحنى : $ص = س^3 - ٤س + ٥$ ويكون المماس عندها // المستقيم $ص + ٢ = ٠$

.....

١٨) أوجد النقط التي تقع على المنحنى : $ص = س^3 - ٣س$ ويكون المماس عندها موازياً لمحور السينات .

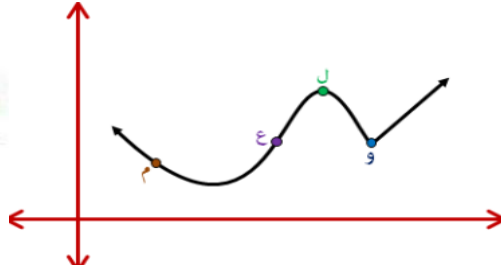
.....

١٩) أوجد النقط التي تقع على المنحنى : $ص = \frac{2-س}{2ص}$ ويكون المماس عندها عمودياً على المستقيم $ص - ٣ = ٠$

.....

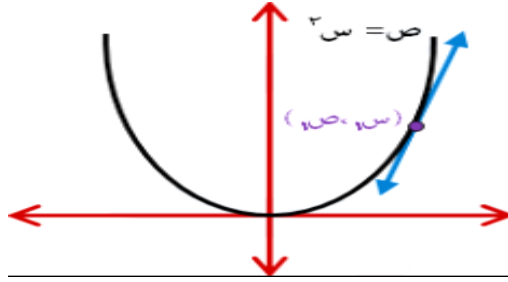
٢٠) أوجد النقط التي تقع على المنحنى : $ص = س^2 - ٣س$

والتي يكون ميل المماس عندها يصنع زاوية قياسها ٥٤° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات



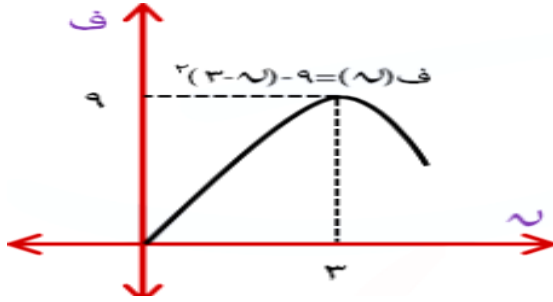
إذا كان الشكل المجاور يمثل بيان الدالة $d(s)$ ،
فإن النقطة التي يكون عندها $d'(s) > 0$ هي:

- و ج
ع د
م ه



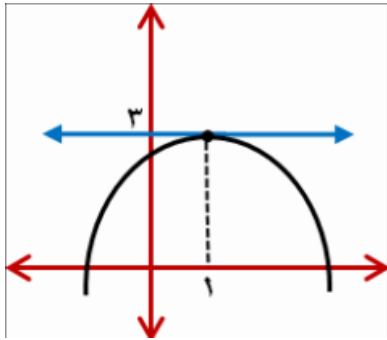
في الشكل المجاور ميل المماس لمنحنى الدالة
 $v = d(s)$ عند النقطة (s_1, v_1) يساوي

- س₁ س₁²
س₁ س₁²



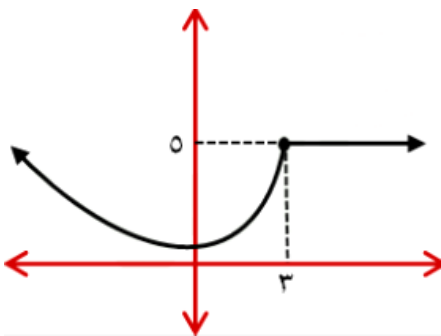
الشكل المجاور يمثل حركة جسيم وفق دالة المسافة $f(s)$ ،
حيث s الزمن بالثواني. السرعة اللحظية عند $s = 3$ ثواني =

- 9 6
3 صفر



الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة $d(s) = s^2 + b + c$
حيث b, c ثوابت فإن قيمة $b =$

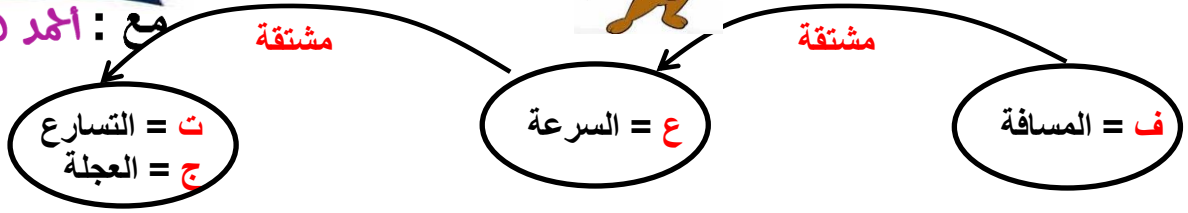
- 3 1
2- 3-



الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة $v = d(s)$

$$f(s) = \frac{d(s+3) - d(3)}{h}$$

- صفر 3
5 غير موجودة



معدل التغير في السرعة تعني العجلة

معدل التغير في المسافة تعني السرعة

المعلومة	قيمة ن
السرعة عند أي لحظة	بدون تعويض عن قيمة ن
السرعة الابتدائية (عند بدء الحركة)	ن = ٠
السرعة اللحظية بعد ٣ ثواني من بدء الحركة	ن = ٣
السرعة المتوسطة في الفترة [٥ ، ٣]	$ع = \frac{ف_٢ - ف_١}{ن_٢ - ن_١} = \frac{التغير في المسافة}{التغير في الزمن}$
التسارع المتوسط في الفترة [٥ ، ٣]	$ت = \frac{ع_٢ - ع_١}{ن_٢ - ن_١} = \frac{التغير في السرعة}{التغير في الزمن}$
أوجد السرعة المنتظمة التي يتحرك بها الجسم	العجلة = صفر ونوجد ن ثم نعوض في ع
أوجد سرعة الجسم عندما تبلغ العجلة ١٢ سم / ث ^٢	العجلة = ١٢ ونوجد ن ثم نعوض في ع
عند أقصى ارتفاع (يسكن الجسم) يقف الجسم	السرعة = صفر
الجسم يسقط سقوط حر (يسقط تحت تأثير وزنة)	العجلة = ١٠ م / ث ^٢ لأسفل العجلة = - ١٠ م / ث ^٢ لأعلى



(١) يتحرك جسم في خط مستقيم ، فإذا كان بُعد الجسم عن نقطة ثابتة بعد n ثانية هو $f = 3n^2 + 5$ العلاقة : ف = $3n^2 + 5$

أوجد كلا من : # أوجد المسافة التي تحركها الجسم حتي يقف .

أوجد التسارع (العجلة) المتوسطة في الفترة بين (٣) ثواني و (٥) ثواني

أوجد التسارع عندما (يسكن) يقف الجسم عن الحركة .

أوجد العجلة عندما تبلغ سرعة الجسم (٢٤ سم / ث)

(٢) يتحرك جسم بسرعة : $E = K \sqrt{f}$ حيث K موجبة وكان تسارعه = 8 م / ث^2
أوجد قيمة K .

(٣) بدأ متسابق بقطع مسافة مقدارها ٢٠٠ متر في طريق أفقي بالعلاقة : $f = \frac{1}{2}n^2 + 15n$

حيث n الزمن بالثواني ، f المسافة بالأمتار .

أوجد : # سرعة المتسابق عندما $n = 3$ ثواني .

تسارع المتسابق لحظة وصوله إلي خط النهاية .

الزمن اللازم لإنهاء السباق ، وسرعة المتسابق عندئذ .



(٤) يتحرك جسيم في خط مستقيم طبقاً للعلاقة : ف (ن) = $\frac{1}{12}n^2 - 2n + 6$ ن

حيث ف المسافة بالسنتيمتر ، ن الزمن بالثانية ،

أوجد سرعة الجسيم عندما تكون عجلته ١٢ سم / ث^٢

(٥) يتحرك جسيم في خط مستقيم طبقاً للعلاقة : ف (ن) = $\frac{1}{3}n^3 - 6n^2$

حيث ف المسافة بالمتري ، ن الزمن بالثانية ،

أوجد السرعة اللحظية للجسيم بعد ٥ ثواني .

أوجد تسارع الجسيم عندما تنعدم سرعته .

(٦) يتحرك جسيم وفق الدالة ف(ن) = $2n^3 - 9n + 15$ حيث ف المسافة بالأمتار،

ن الزمن بالثواني. أوجد تسارع الجسيم بعد ٣ ثواني من بدء الحركة.



بدأ مستعمرة للبكتيريا بالانقراض مكونة من ١٠٠٠ خلية وكانت دالة الانقراض هي:

$$م(٧) = ١٠٠٠ - ٧^٥$$

م(٧) عدد الخلايا البكتيرية ، (٧) الزمن بالأيام.

(٢) ما معدل انقراض البكتيريا بعد ١٠ أيام؟

(ب) بعد كم يوم سوف تنقرض مستعمرة البكتيريا؟

إذا كانت شدة رد الفعل (ص) لمريض تتوقف على الكمية المعطاة (س) من الدواء وتعطى بالعلاقة:
 $ص = س(٢-س)$ احسب: (٢) معدل التغير اللحظي في شدة رد الفعل عند أي كمية.
 (ب) معدل التغير اللحظي في شدة رد الفعل عند $س=١$



المشتقات من الرتب العليا

المشتقة الثانية = مشتقة المشتقة الأولى = ص'' = د'' (س) = $\frac{ص''}{ص'}$

المشتقة الثالثة = ص''' = د''' (س) = $\frac{ص'''}{ص''}$

(١) إذا كانت المسافة تعطى بالعلاقة : ف = $ن^٣ - ٣ن^٢ + ٥ن - ١$ فأوجد التسارع بعد ثانيتين .

(٢) إذا كانت $٧ = (س)٧$ ، $٧ = (س)٧$ ، $٧ = (س)٧$ فإن قيمة $٧ = \square$ $٢٣ \square$ $٢٤ \square$ $٢٢ \square$ $٢١ \square$

(٣) إذا كانت $د = (س)٧$ ، وكانت $د'' = (س)٢٠$ ، فإن قيمة $٧ =$

(٤) إذا كانت $ل = (س)٢$ ، $ل = (س)٢$ ، $ل = (س)٢$ ، فإن $ه = (١-)$ =

(٥) إذا كانت $د = (س)٢$ دالة قابلة للاشتقاق ، $ه = (س)٢$ ، وكانت $د = (س)٢$ ، $١ = (س)٢$ ، فإن $ه = (٢) =$

(٦) إذا كانت $ه = (س)٢$ قابلة للاشتقاق على $ح$ ، $ه = (س)٢$ ، $ه = (س)٢$ ، بحيث $ه = (س)٢$ ، $١ = (س)٢$ ، فإن $ه = (٢) =$

$$(٧) \text{ إذا كانت د(س) = } 1 - 3\text{س}^3 \text{ فإن نها} \frac{\text{د(} 2 + \text{هـ) - د(} 2 \text{)}}{2\text{هـ}}$$

$$(٨) \text{ إذا كانت د(س) = } 5\text{س}^3 + 2 \text{ ، فإن نها} \frac{\text{د(} 3 + \text{س) - د(} 3 \text{)}}{\text{هـ}} \text{ عند س = } 1$$

$$(٩) \text{ إذا كانت نها} \frac{\text{د(} 3 + \text{س) - د(} 3 \text{)}}{\text{هـ}} = 3\text{س}^2 + 3 \text{ ، فإن د(} 1 \text{)}$$

$$(١٠) \text{ إذا كانت د(س) = } \frac{1}{3}\text{س}^2 \text{ ، وكانت نها} \frac{\text{د(} 4 + \text{هـ) - د(} 4 \text{)}}{\text{هـ}} = 8 \text{ ، فإن قيمة } ٢$$

(١١) إذا كانت د(س) = $٢س^٣ - ٥س^٢$ ، فإن نهما $\frac{د(١+هـ) - د(١)}{١+هـ - ١}$

(١٢) إذا كانت د(١) = ٣، د(١) = ٦، فإن نهما $\frac{هـ٢ + ٤هـ}{د(١+هـ) - د(١)}$

(١٣) إذا كانت د(س) = (س - ٣)(٣س + ٢س + ٣س + ٩س) فإن نهما $\frac{د(هـ=٢) - د(٢-)}{هـ٣}$



مع : الحمد لله

طريقة الحل	صيغة السؤال	
$(1) \quad v = (3 + s)^6$ $(2) \quad \frac{v}{s} = (3 + s)^6 \times 6$	<p>إذا كان : $v = 6^6$ حيث $3 + s = 6$</p> <p>فأوجد : $\frac{v}{s}$</p>	التعويض
$(1) \quad \frac{v}{s} = 6^6 \times 6$ $(2) \quad \frac{v}{s} \times \frac{s}{6} = \frac{v}{6}$ $6 \times 6^6 =$ $6 \times (3 + s)^6 =$	<p>إذا كان : $v = 6^6$ حيث $3 + s = 6$</p> <p>فأوجد : $\frac{v}{s}$</p>	قاعدة السلسلة
$(1) \quad (3 + 2(2 - s)) = (s) \quad (d \text{ هـ})$ $(2) \quad (3 + 2(2 - s))^2 = (s) \quad (d \text{ هـ})$	<p>$d = (s) = 3 + 2(2 - s)$ ، $2 - s =$</p> <p>فأوجد : $(d \text{ هـ}) / (s)$</p>	تركيب الدوال
<p>نستخدم القانون :</p> $(d \text{ هـ}) / (s) = (d \text{ هـ}) / (s) \times (s) / (s)$		

(1) إذا كان : $v = 6^6 - 6^6 = 3 + 6$ ، $3 + s = 6$ ، $1 - 3 = 6$

ثم اثبت أن : $\frac{v}{s} = 6^6 + 9 - \frac{6^6}{s} = 6^6 = \text{صفر}$ فأوجد : $\frac{v}{s}$

(2) إذا كان : $v = 6^6$ ، $3 + 2(2 - s) = 6$ ، $3 + 2(2 - s) = 6$ ، فأوجد : $\frac{v}{s}$

(٣) إذا كان : ص = ^٢س ، س = ٣ل ، ل = ٦ع فأوجد : $\frac{ص}{ع}$

(٤) إذا كان : ص = ^٢س + ٥ ، س = ٥ع - ٨ ، فأوجد : $\frac{ص}{ع}$

(٥) إذا كان : ص = ^٢س + ٣س + ٢ ، ل = ٢س - ١ ، فأوجد : $\frac{ص}{ل}$ عند س = ١

(٦) إذا كان : ص = ^٢ل - ٣ ، ل = ٥س - ٥ ، فأوجد : $\frac{ص}{س}$

(٧) إذا كان : ص = (٢ + ^٢س) (١ - س) ، ع = (٥ - س) (١ + س)

فأثبت أن : $\frac{ص}{ع} = \frac{٢٦}{٢٤٦}$ ، $٣س - ٢س - ١٢ + ٢$

(٨) إذا كان : س = $\frac{ن}{١+ن}$ ، ص = $\frac{١+ن}{ن}$ ، أثبت أن : ^٢ص = ٢ ص

فأوجد : ص //

٩) إذا كان : ص = $3n - 2$ ، س = $n^2 - 1$

فأوجد : (ق هـ) (٢)

هـ (س) = ٨ ،

١٠) إذا كان : ق (س) = $3s^2 - 2s$ ،

فأوجد : (هـ ق) $(\frac{1}{2})$

ق (س) = $8s^3 + 2$ ،

١١) إذا كان : هـ (س + ١) = $1 + 2s$ ،

اثبت أن : (د هـ) $(1) = 2$

هـ (س) = $2s - 1$ ،

١٢) إذا كان : د (س) = $3s^3 - 2s - 1$ ،

فأوجد (د هـ) $(س)$

هـ (س) = $2س$ ،

١٣) إذا كان : د (س) = $3س - ١$ ،

فأوجد : (د هـ) (٣)

د (٦) = ٥ ،

هـ (٣) = ٢ ،

١٤) إذا كان : هـ (٣) = ٦ ،

(١٥) إذا كان: ق (٣) = ٢ ، ق (٣) = ٢ ، هـ (٣) = ١ ، هـ (٣) = ١ - ، ق (١) = ٤ ، فأوجد قيمة: (ق ٥ هـ) / (٣)

(١٦) إذا كان: ق (س) = ك س + ٣ ، هـ (١) = ٢ - ، هـ (١) = ٥ ، (هـ ٥ ق) / (١) = ٢٠ ، فأوجد قيمة ك

(١٧) باستخدام قاعدة السلسلة ، أوجد ص / للدالة: ص = (س - ٢) ٢

(١٨) باستخدام قاعدة السلسلة ، أوجد ص / للدالة: ص = (٥ س - ٦) ٥

(١٩) إذا كان د(س) = |٢ - س| ، هـ(س) = ٣ - ٢ س ، فأوجد (٥ هـ) / (٢) }
 س > ١
 س ≤ ١
 ٤ س + ١

(٢٠) إذا كان $و(س٣) = ٣س٢ + ١٢س$ ، أوجد $و(٣)$

(٢١) إذا كانت $د(س) = ١ + س٢$ ، فإن $د(٥٥)$ (-١)

(٢٢) إذا كانت $ه(٥٥) = ٣ = ١٥$ ، حيث $ه(س) = ٩ - س٢$ ، $د(٣) = ٥$ ، فإن $د(٣) =$

(٢٣) إذا كان $و(س) = ٣ + س٢$ ، فإن قيمة $و(٥٥)$ (١)

(٢٤) إذا كانت $ص = د(ع)$ ، $ع = د(س)$ وكان $٤ = \frac{ع}{ص}$ ، $٢ = \frac{ع}{س}$ ، فإن $ص = ع(٥)$ (س)

ص^٢ مشتقتها ٢ ص^١/

ص^٣ مشتقتها ٣ ص^١/



الاشتقاق الضمني

خطوات إيجاد المشتقة الضمنية : (١) بتفاضل الطرفين بالنسبة إلى س .

(٢) نضع $\frac{ص٦}{س٦}$ في طرف & س ، ص في طرف .

$$\frac{\text{البعيد}}{\text{القريب}} = \frac{ص٦}{س٦} \quad (٤)$$

(٣) نأخذ $\frac{ص٦}{س٦}$ مشترك .

تمارين

أوجد المشتقة الأولى لكل مما يأتي :

$$(٢) ٢ص + ٣ص - س + ١ = ٠$$

$$(١) ٢ص - ٢ص = ٥س$$

$$(٤) ٢ص + ٢ص = ٢ص + ١ = ٢ص$$

$$(٣) ٢ص + ٢ص - ٥ = ٢ص = ٢ص$$

$$(٦) ٢ص - ٣ص + ٢ص = ٥$$

$$(٥) ٢ص + ٢ص + ٤ = ٠$$



(٧) أوجد ميل المماس للمنحنى : $s^2 + 2s - 6 = 0$
 عند النقطة (- ٣ ، ٥) وماذا نستنتج ؟

(٨) أوجد قياس الزاوية التي يصنعها المماس للمنحنى : $s^2 + 4s - 4 = 0$
 مع الاتجاه الموجب لمحور السينات عند النقطة (١ ، ١)

(٩) أوجد قيم s التي يكون عندها المماس للمنحنى : $3s^2 = 5s^2 + 3s$ موازياً لمحور السينات

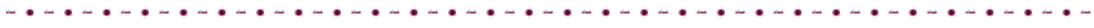
(١٠) أوجد النقط التي تقع على المنحنى : $\frac{s^2 - 2}{s} = 3s - 3$ ليكون المماس عمودي على المستقيم : $s - 3 = 0$



(١١) أوجد معادلة المماس والعمودي للمنحنى : $س^2 + ص^2 - ٤س + ٢ص = ٢٠$
 عند النقطة (- ١ ، ٣)



(١٢) أوجد معادلة المماسات للمنحنى : $ص = س^2 - ٣س + ٥$ والموازية للمستقيم : $٩س - ص = ١$



(١٣) أوجد معادلتى المماسين للمنحنى : $س^2 + ص^2 = ٥٢$ الموازيين للمستقيم : $٢س + ٣ص = ك$



(١٤) إذا كان : $ص^2 = ٢س^2 - ٢س^٣$ فاثبت أن : $ص // ص' + ص'' + ٣س = ٢$

$$(١٥) \text{ إذا كان : ص} = \frac{١ + س٣}{٢(١ - س)}$$

$$\text{فأثبت أن : (س - ١) ص'' + ٤ (س - ١) ص' + ٢ ص} = \text{مع : احمد هجرس}$$

$$\text{فأثبت أن : (ص - ١) ص'' + ٥ (ص' ص) = ٠}$$

$$(١٦) \text{ إذا كان : (ص - ١) = ١٢ س}$$

$$\text{فأثبت أن : (س - ٣) ص'' + ٢ ص' = صفر}$$

$$(١٧) \text{ إذا كان : س ص - ٣ ص = ٧ س + ١٥}$$

$$\text{فأثبت أن : س ص'' + ٢ ص' = ٢ - س}$$

$$(١٨) \text{ إذا كان : س ص + س' = ٢ ، س} \neq ٠$$



١٩) إذا كان : س = ص + ٢ ص فاثبت أن : ص // (س + ٢) + ٤ ($\frac{ص}{س}$) = صفر

٢٠) إذا كان : س ص^٢ = (س + ص)^٣ فاثبت أن : ص^١ = $\frac{ص}{س}$

٢١) إذا كان : (س ص + ١) س ص^٢ = ١ فاثبت أن : ص + س ص^١ = ٠

٢٢) إذا كان : س^٣ + ص^٣ = ١ فاثبت أن : ص^٥ ص // + ٢ س = صفر

$$(٢٣) \text{ إذا كانت ص} = د(مأس) ، \text{ ص} = ٢س + ٤س = ٦س$$

$$\text{فأثبت أن: د} (مأس) = ٨س + ٤س = ١٢س$$

$$(٢٤) \text{ إذا كانت ص} = د(س) ، ع = \sqrt[٢]{٢س} ، \text{ فأثبت أن: ص} = ٢س + \frac{٤س}{٢س} + \frac{٤س}{٢س} = ٢س + ٢ + \frac{٤س}{٢س} = ٢س + ٢ + ٢ = ٤س + ٤$$

$$(٢٥) \text{ إذا كانت ص} = د(مأس) ، \text{ وكان ص} = ٥س + س ، \text{ فأثبت أن: د} (مأس) = ١٥س + ٣س = ١٨س$$

$$\frac{ص}{ع} = \frac{س}{ع}$$



المعدلات الزمنية المرتبطة

وكذلك $\frac{ص}{ع}$ & $\frac{ع}{ن}$

المعلومة	الاستفادة
نصب (يتسرب) الماء في اسطوانة	نق ثابت ، ع يتغير
نصب (يتسرب) الماء في مخروط	نق يتغير ، ع يتغير
إذا كان المتغير يزداد (يتمدد) (يبتعد) (يصب) بزيادة ن	المعدل الزمنى يكون موجب
إذا كان المتغير ينقص (ينكمش) (يقترب) (يتسرب) بزيادة ن	المعدل الزمنى يكون سالب

خطوات الحل : # نكتب علاقة تربط بين المتغيرات { إذا كانت غير معطاة }

بإجراء تفاضل الطرفين بالنسبة للزمن ؟

نعوض بالمعطيات .

الأشكال الهندسية

الملاحظات	المحيط	المساحة	
المساحة = $\frac{1}{2} \times أ \times ب$ / ج ا د	مجموع أطوال أضلاعه	$\frac{1}{2}$ القاعدة \times الارتفاع	المثلث
	$٢ (الطول + العرض)$	الطول \times العرض	المسطح
ل : طول الضلع	ل	$ل^2 = \frac{1}{2} (القطر)^2$	المربع
ل // ل٢	مجموع أطوال أضلاعه	$\frac{1}{2} (ل١ + ل٢) \times ع$	شبه المنحرف
	$٢ \times$ مجموع ضلعين متجاورين	القاعدة \times الارتفاع	منازى الأضلاع
المساحة = $\frac{1}{2}$ حاصل ضرب القطرين	ل \times طول الضلع	القاعدة \times الارتفاع	المعين
ل = $هـ \times نق$	ل + ٢ نق	$\frac{1}{2} ل \times نق$	القطاع الدائري
	٢ π نق	π نق ^٢	الدائرة

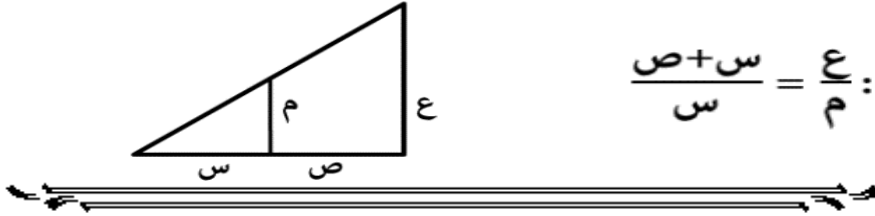
المجسمات

مع : المرد هجرس

مع : المرد هجرس	المساحة الكلية	المساحة الجانبية	
مساحة القاعدة x ع	الجانبية + مساحتي القاعدتين	محيط القاعدة x ع	المنشور القائم
س ص ع	$(س ص + ع ص + ع ع)$		منازلي المستطيلات
$ل^2$	$ل^2 6$	$ل^2 4$	المكعب
$\pi ر^2 ع$	$2 \pi ر^2 ع + 2 \pi ر^2$	$2 \pi ر ع$	الاسطوانة
$\frac{4}{3} \pi ر^3$	مساحة سطحها = $4 \pi ر^2$		الكرة
$\frac{1}{3} \pi ر^2 ع$	$\pi ر^2 ل + \pi ر^2$	$\pi ر ل$	المخروط

نظرية فيثاغورس : (الوتر)² = (ضلع القائمة الأول)² + (ضلع القائمة الثاني)²

(البعد بين نفطتين)² = (فرق السينات)² + (فرق الصادات)²



(١) تتحرك نقطة على المنحنى $س^2 + ص^2 = ع^2$. أوجد معدل تغير احدائها الصادي .

وكان معدل تغير احدائها السيني بالنسبة للزمن عند النقطة (١ ، ٢) = ٣

(٢) تتحرك نقطة (س ، ص) على المنحنى $س^2 + ص^2 = ٤$.

عين موضع النقطة عند اللحظة التي يكون فيها سرعة احدائها الصادي ضعف سرعة احدائها السيني .



(٣) في لحظة ما كان بعدى مستطيل ٨ سم ، ٦ سم فإذا كان البعد الأول ينقص بمعدل ١ سم / دقيقة ، وكان البعد الثاني يزداد بمعدل ٢ سم / دقيقة . أوجد @ معدل تغير المساحة عند تلك اللحظة . @ معدل تغير المساحة بعد دقيقتين .

(٤) سلم طولة ٥ م يرتكز بأحد طرفية على حائط رأسي ، وبطرفه الآخر على أرض أفقية ، فإذا انزلق السلم وكان الطرف السفلى يبتعد عن الحائط بمعدل $\frac{1}{4}$ م/ث احسب معدل هبوط الطرف الآخر عندما يكون السلم مائلاً على الأرض بزاوية قياسها 60°



٥) ونش رأسي طولها ٦ م ، يتحرك بسرعة ٥ م / ث في اتجاه مصباح على ارتفاع ١٦ م

أوجد : @ معدل تحرك نهاية ظل الونش .

@ معدل تغير طول ظل الونش .

@ معدل تغير بعد نهاية الونش العليا عن المصباح عندما يكون على بعد ١٠ م

٦) كرة جوفاء يزداد نصف قطرها الداخلي بمعدل ١ سم / ث بحيث يبقى حجم المادة ثابت وذلك عند اللحظة التي يكون

فيها نصف قطرها ٣ سم ، ٩ سم

أوجد : @ معدل تغير نصف قطرها الخارجي .

@ معدل تغير مساحة سطحها الخارجي .

@ معدل تغير سمكها .



٧) قمع على هيئة مخروط دائري قائم ارتفاعه ٣٠ سم ونصف قطر قاعدته ١٢ سم مثبت بحيث رأسه لأسفل ومحورة رأسي ، يصب فيه الزيت بمعدل ٢٠ سم^٣ / ث بينما يتسرب الزيت من ثقبه بمعدل ٨ سم^٣ / ث أوجد معدل ارتفاع الزيت في القمع عندما يصل ارتفاع الزيت إلى $\frac{1}{3}$ ارتفاع القمع .

٨) متوازي مستطيلات من المعدن قاعدته مربعة ، وارتفاعه ثلاثة أمثال طول ضلع قاعدته ، يتمدد بالتسخين احسب معدل الزيادة في حجمة عندما يزداد طول ضلع قاعدته بمعدل ٢ سم/ث ويكون طولها ٢ سم .

٩) إذا كان حجم مكعب يزداد بمعدل ٣ سم^٣ / ث أوجد : @ معدل زيادة طول ضلعة .
@ معدل زيادة مساحة أحد أوجهه . وذلك عندما يكون طول ضلعة ٦ سم

١٠) تتمدد قطعة معدن على شكل متوازي مستطيلات طول ضلع قاعدته يزيد عن عرضة ٢ سم وارتفاعها ثلاثة أمثال عرضها ، فإذا كان الحجم يزداد بمعدل ٦ وسم^٣ / د عندما يزداد العرض بمعدل ٠.١ وسم / د @ فأوجد أبعاد قطعة المعدن .

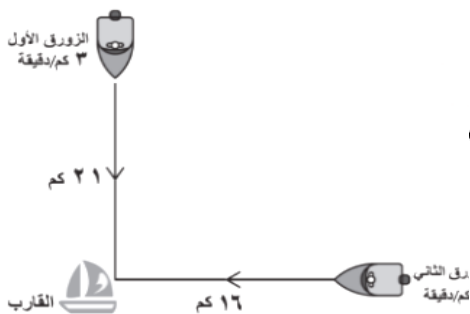
مع : احمد هجرس

١١) بدأت سفينة الحركة شرقاً الساعة العاشرة صباحاً بسرعة ٢٠ ميل / ساعة ، وبعد ساعتين بدأت سفينة أخرى تتحرك جنوباً من نفس النقطة بسرعة ٣٠ ميل / ساعة ، أوجد تباعد السفينتين بعد ٣ ساعات من انطلاق السفينة الثانية

١٢) إذا كان المنطاد أيبعد عن المنطاد ب مسافة أفقية قدرها ٤ متر ، انطلقا المنطادان رأسياً لأعلى بسرعة ٢ م/ث ، ١ م/ث علي الترتيب ، أوجد معدل التغير في المسافة بين المنطادين بعد مرور ٣ ثوان من بدء الانطلاق .

(١٣) مستطيل طوله س = ١٩ سم ، وعرضه ص = ٧ سم. إذا كان طول المستطيل يتناقص بمعدل ١ سم/ث ، وعرضه يتزايد بمعدل ٢ سم/ث ، فاحسب معدل التغير في مساحة المستطيل في اللحظة التي يكون فيها المستطيل مربعاً.
ج . ١ . ١٠ مد بجرس

(١٤) مثلث متطابق الضلعين ارتفاعه يساوي خمسة أمثال طول قاعدته فإذا كان طول القاعدة يزداد بمعدل ٠,٠٤ سم/ث اوجد معدل الزيادة في الارتفاع ثم اوجد معدل الزيادة في المساحة عندما تكون طول القاعدة ١٠ سم.



(١٥) تحرك زورقا إنقاذ نحو قارب، حيث يبعد القارب عن الزورق الأول ٢١ كم جنوباً، وعن الزورق الثاني ١٦ كم غرباً، إذا كان معدّل اقتراب كلاً من الزورقين من القارب ٣ كم/دقيقة ، ٢ كم/دقيقة على الترتيب. أوجد معدّل تغيّر المسافة بين الزورقين بعد مُضي ٦ دقائق من لحظة انطلاقهما.



تحديد إشارات الدوال

خط الأعداد	خطوات الحل	الدالة
دائما مثل إشارة العدد		الثابتة
\leftarrow مثل إشارة س \rightarrow عكس إشارة س ٢		الخطية
\leftarrow مثل س ^٢ عكس س ^٢ مثل س ^٢ ٢ ٥	لها حلان	(١) نوجد أصفار الدالة (٢) نرسم خط الأعداد للمشتقة (٣) نحدد إشارة المشتقة في كل فترة النربيعية
\leftarrow مثل إشارة س ^٢ مثل إشارة س ^٢ ٢	لها حل واحد	
مثل إشارة س ^٢	ليس لها حل	

فإذا كانت الإشارة موجبة ، فإن الدالة تكون تزايدية في هذه الفترة (ميل المماس للمنحنى موجب).
 وإذا كانت الإشارة سالبة ، فإن الدالة تكون تناقصية في هذه الفترة (ميل المماس للمنحنى سالب).



ابحث فترات التزايد والتناقص للدالة :

$$(٢) د (س) = ٥ - س + ٤$$

$$(١) د (س) = ٣ - س - ٢$$

$$(٤) د (س) = ٥ - س - ٤ - س$$

$$(٢) د (س) = ٣ + س - ٤ - س$$

تحت
الرياضيات
مع: احمد هجرس

$$(5) \text{ د (س) } = 3س - 2س + 2$$

$$(6) \text{ د (س) } = 3س - 3س + 2س + 1س + 2$$

$$(7) \text{ د (س) } = 3س + 12س - 10$$

$$(8) \text{ د (س) } = 3س - 3س - 9س + 1$$

$$(9) \text{ ص (س) } = 3س - 4س$$

$$(10) \text{ ص (س) } = 3س - 1س$$

$$(11) \text{ ص (س) } = \frac{س}{2س - 2}$$

$$(12) \text{ ص (س) } = \frac{س}{1س + 1}$$

$$(13) \text{ ص (س) } = 2 - |1س - 1|$$

$$(14) \text{ ص (س) } = 3 + |2س - 2|$$

$$(15) \text{ ص (س) } = \begin{cases} 1س + 2س \\ 2س - 3س \end{cases}$$

$$(16) \text{ د (س) } = \begin{cases} 3س + 5س \\ 5س \\ 3س - 1س \end{cases}$$

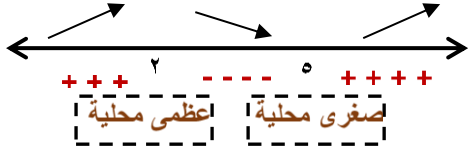
$1س > 1س$
 $1س \geq 1س$
 $1س < 1س$

متعة الرياضيات
مع : احمد هجرس



القيم (القسوى) العظمى والصغرى المحلية

الحالة الأولى (باستخدام المشتقة الأولى) :



(١) نكتب ص = ٠٠٠

(٢) نوجد النقط الحرجة (لابد أن تنتمي للمجال المحدد في المسألة)

(٣) نضع ص' = صفر

{ بإيجاد قيم س ثم نعوض في المعادلة الأصلية لإيجاد قيم ص بشرط أن تكون قيم س تنتمي للفترة }

(٤) نرسم خط الأعداد ونحدد إشارة ص'

النقطة (٢ ،) عظمى محلية ، النقطة (٥ ،) صغرى محلية .

الحالة الثانية (باستخدام المشتقة الثانية) :

(١) ص = ٠٠٠

(٢) ص' = ٠

(٣) ص'' = ٠

(٤) نضع ص' = صفر لإيجاد س١ { قيم س التي يكون عندها نقاط حرجة للدالة }

د'' (س١) موجبة تكون القيمة صغرى محلية
د'' (س١) سالبة تكون القيمة عظمى محلية
د'' (س١) = صفر تكون هذه الطريقة لا تصلح

أي أن مماس المنحنى عندها // محور السينات

إيجاد النقط الحرجة : (١) عندها ص' = صفر

(٢) عندها ص' = غير موجودة

النقطة الحرجة	الحالة
نضع البسط = صفر عند أصفار المقام يوجد نقط حرجة	الدالة الكسرية (النسبية)
عند أصفار ما تحت الجذر	الجذر التربيعي
عند النقاط الطرفية للفترة	دالة الصحيح
عند أصفار المطلق	دالة المطلق
إذا كانت : المشتقة اليميني ≠ المشتقة اليسري	الدالة المعرفة بأكثر من قاعدة

ملحوظة هامة : # لابد من وجود النقطة الحرجة داخل المجال المحدد في المسألة .

عند بداية ونهاية الفترة المحددة تكون نقاط حرجة .

(١) أوجد النقط التي عندها قيم عظمى أو صغرى محلية للدالة : $v = 2s^2 - 3s^3 - 12s^4 - 5$ ثم حدد نوعها.

متعة الرياضيات
مع : احمد هجرس

(٢) ابحث نقط القيم العظمى والصغرى المحلية للدالة $v = \frac{1}{3}s^3$

(٣) إذا كانت : $v = s^2 - bs + 1$ لها نقطة حرجة عند $s = 2$ أوجد قيمة b ثم حدد نوع النقطة الحرجة

أوجد النقط الحرجة للدالة : $d(s) = \sqrt{s^2 - 4s}$

ابحث النقاط الحرجة باستخدام طريقة المشتقة الثانية

(٥) $v = 3s^0 + 2s^3 - 1$

(٤) $v = s^4 + 1$

$$(7) \text{ ص } = \frac{4 - س}{1 - 2س}$$

$$(6) \text{ ص } = \frac{1 - 2س}{1 + 2س}$$

$$(9) \text{ د(س) } = [س + 2] \text{ في الفترة } [0, 3]$$

$$(8) \text{ ص } = 5 - |س + 3|$$

$$(11) \text{ ص } = \left. \begin{array}{l} 2س - 1 \\ 3 \geq س \\ 3 < س \end{array} \right\}$$

$$(10) \text{ ص } = \left. \begin{array}{l} 1 + 2س \\ 0 \geq س \\ 0 < س \end{array} \right\}$$

$$(13) \text{ ص } = \left. \begin{array}{l} 1 + س \\ 1 - س \\ 1 < س \\ 1 > س \end{array} \right\}$$

$$(12) \text{ د(س) } = \left. \begin{array}{l} 2س - 2س - 1 \\ 2س - 1 \\ 2س > 0 \\ 2س \leq 2 \end{array} \right\}$$

(14) إذا كانت د(س) = $\frac{ك}{س} + 2س$ فعين قيمة ك بحيث يكون للدالة نقطة حرجة عند س = 2
ثم بين ما إذا كانت هذه النقطة عظمى أو صغرى محلية أو ليست كذلك .



القيم القصوى المطلقة يمكن أن تحدث عند أطراف الفترات أو داخلها بينما القيم القصوى المحلية تحدث داخل الفترات فقط.

خطوات الحل : (١) نفس خطوات القيم العظمى والصغرى المحلية .

(٢) نعوض عن بداية الفترة ونهايتها في المعادلة الأصلية :

أكبر قيمة لـ ص هي عظمى مطلقة .

أصغر قيمة لـ ص هي عظمى مطلقة .

لرسم منحنى الدالة :

(١) نسجل في جدول جميع النقاط التي حصلنا عليها (عظمى وصغرى محليه ، عظمى وصغرى مطلقة)

(٢) نوجد نقط التقاطع مع محور السينات والصادات .

(٣) نرسم جميع النقاط علي المحاور .

أوجد القيمة العظمى المطلقة والقيمة الصغرى المطلقة للدوال الآتية :

(١) ص = ١ + ٢س - س^٣ في الفترة [١ ، ٣] ثم ارسم منحنى الدالة

(٢) ص = س^٤ - س^٢ + ١ في الفترة [-١ ، ١] ثم ارسم منحنى الدالة

(٣) ص = ٣ - ٥س - س^٢ في الفترة [-٤ ، ٣] ثم ارسم منحنى الدالة

(٤) ص = |س - ٣| في الفترة [٠ ، ٤]

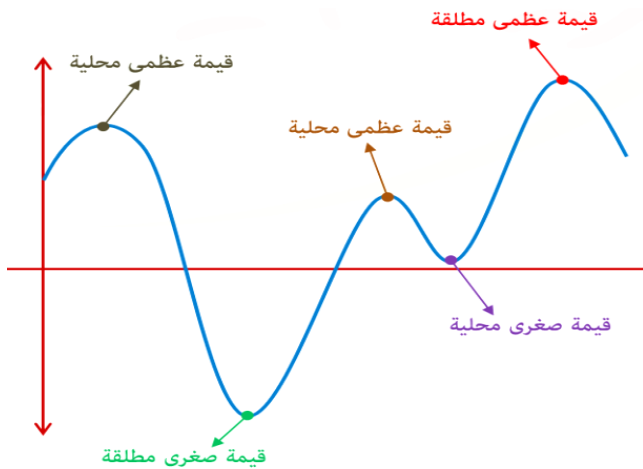
(٥) ص = |س| (٢ + س) في الفترة [-٣ ، ٢]

(٦) ص = $\frac{1 + س + 2س}{1 + س - ٢س}$ في الفترة [٠ ، ٢]

(٧) ص = س + $\frac{1}{1 + س}$ في الفترة [-١/٢ ، ٣]

(٨) ص = $\sqrt[٣]{(١ - س)}$ في الفترة [٠ ، ٩]

(٩) ص = $\left. \begin{array}{l} ٢س + ٣ \\ ٤ + ٢س \end{array} \right\} =$ في الفترة [-٢ ، ٢] $\left. \begin{array}{l} ١ > س \\ ١ \leq س \end{array} \right\}$





مع : احمد هجرس

كيف نعرف أن المسألة تتبع هذا الدرس ؟ نجد أكبر ما يمكن ، أصغر ما يمكن ، أكبر مساحة ، أصغر حجم ،

طريقة الحل : (١) نعبر عن **المطلوب** كدالة في متغير واحد (باستخدام المعلومات المساعدة من المعطيات)

(٢) نوجد المشتقة الأولى (بالنسبة للمتغير الموجود)

(٣) نضع المشتقة = ٠

(٤) نوجد قيم المتغير ونأخذ منها الذي ينتمي لمجال الدالة

(٥) نوجد المشتقة الثانية

(٦) نعوض بقيمة المتغير في المشتقة الثانية ، فإذا كان الناتج موجب (أصغر ما يمكن)

وإذا كان الناتج سالب (أكبر ما يمكن)



(١) أوجد عددين مجموعهما ٢٠ وحاصل ضربهما أكبر ما يمكن .

(٢) صفيحة معدنية رقيقة مربعة الشكل طول ضلعها ١٠ سم ، قطع من أركانها أربعة مربعات متساوية ثم ثنى الجزء الباقي على شكل علبة بدون غطاء . أوجد طول ضلع المربع المقطوع بحيث يكون حجم العلبة أكبر ما يمكن .

(٣) أوجد أقرب نقطة إلى النقطة (٣ ، ١) وتقع على المنحنى $v^2 - 2v + 4 = s - 23 = 0$

(٤) نافذة على هيئة مستطيل يعلوه مثلث متساوي الساقين تنطبق قاعدته على أحد بعدي المستطيل ، فإذا كان ارتفاع المثلث $\frac{3}{8}$ طول قاعدته ١٢٠ سم فأوجد بعدي المستطيل التي تجعل مساحة النافذة أكبر ما يمكن .

(٥) إذا كانت تكاليف تسيير عربة بخارية تتكون من جزئين أحدهما ثابت = ١٠٠ والآخر ثمن الوقود الذي يتناسب مع مربع السرعة فإذا علم أنه لتشغيل العربة بسرعة ٢٥ كم / س تلزم تكلفة قدرها ١٢٥ فأوجد السرعة التي يجب أن تسيير بها العربة حتى تكون تكلفة قطع الكيلومتر الواحد أقل ما يمكن .

(٦) رجل في قارب عند نقطة ح تبعد ٥ كم عن أقرب نقطة أ على شاطئ مستقيم ويرغب في الوصول إلى نقطة ب على نفس الشاطئ تبعد ٦ كم من أ فإذا علم أن الرجل يستطيع أن يجذف بسرعة منتظمة ٢ كم / س وأن يمشى على الشاطئ بسرعة منتظمة ٤ كم / س أوجد أين يرسو ليصل إلى ب في أقل وقت ممكن .

(٧) مصنع سيارات يبيع س سيارة من انتاجه أسبوعياً بسعر السيارة ع ريال حيث $500 = 7 - s$ وكانت التكلفة الكلية للسيارات هي $t = 2700 + 36s + \frac{1}{4}s^2$ ريال اوجد قيمة س التي تجعل المصنع يحقق أكبر ربح أسبوعي .

حيث **ثمن البيع = السعر × عدد السيارات**

ملحوظة : الربح = ثمن البيع - التكلفة

١) مصنع ينتج س من أجهزة الراديو في اليوم ، فإذا كانت التكاليف الكلية لهذه الأجهزة تساوي $(\frac{1}{4}س^2 + ٢٥س + ٢٥)$ ريالاً ،
وبياع الجهاز الواحد بسعر $(١٠٠ - \frac{1}{٢}س)$ ريال ، فأوجد الإنتاج اليومي من الأجهزة ليكون المكسب أكبر
ما يمكن. ثم أوجد هذا المكسب.

٢) مصنع مركبات كيماوية يبيع س علبة من مركب حمضي بسعر ٤٠ ريال لكل علبة ، فإذا كانت تكلفة إنتاج س علبة من
المركب هي $٠,١س^2 + ٢٠س + ٤٠٠٠٠٠$ ، فأوجد عدد العلب التي يجب ان ينتجها المصنع للحصول على أعلى
ربح ممكن.

٣) شركة تنتج عدد ل من أجهزة الهاتف في اليوم. إذا كانت التكاليف الكلية لصناعة هذه الأجهزة تساوي $(\frac{1}{٣}ل^3 + ٣٠ل)$
ريالاً. وبياع الجهاز الواحد بسعر $(٢ - \frac{ل}{٢})$ ريالاً. فإذا كان أكبر مكسب حققته الشركة عندما أنتجت ١٢ جهاز في أحد
الأيام، فأوجد قيمة ٢ ، ثم أحسب المكسب بالريال في ذلك اليوم.

٤) أوجد عددين موجبين بحيث يكون حاصل ضرب أحدهما في مربع الآخر أكبر ما يمكن ، مع العلم بان مجموع العددين ٣٠.

٥) أوجد عددين موجبين مجموعهما ١٢ بحيث يكون مجموع مكعبيهما أصغر ما يمكن.

٦) ثلاثة أعداد طبيعية موجبة مجموعها ٢٦ ، إذا كان العدد الثاني هو ثلاث أضعاف العدد الأول. فأوجد هذه الأعداد بحيث
يكون مجموع مربعاتهم أصغر ما يمكن.

٧) يريد خياط ملابس نسائية تقسيم قطعة قماش طولها ١٢ م إلى قطعتين لعمل فستان بحيث يكون مربع طول إحدى
القطعتين مضافاً إليه ثلث مكعب طول القطعة الأخرى أصغر ما يمكن. أوجد طول كل من القطعتين

٨) سلك طوله ٥ م يراد تقسيمه إلى جزئين ، بحيث يكون مجموع مربع الجزء الأول وأربعة أمثال مكعب الجزء الآخر أقل ما يمكن. فما طول كل جزء؟

٩) قطعة أرض مستطيلة الشكل محاطة بسور طوله ١٢٠ م. أوجد بُعديها إذا كانت مساحة سطحها أكبر ما يمكن.

١٠) مستطيل محيطه ٣ م ، أوجد بُعديه حتى تكون مساحتها أكبر ما يمكن.



١١) صاحب مزرعة اغنام لديه ٣٦٠ م من السلك الشائك يريد عمل ٦ حظائر مستطيلة الشكل ومتساوية المساحة كما بالشكل المقابل جد أكبر مساحة للحظائر يمكن عملها.



١٢) صاحب مزرعة لديه سلك طوله ٦٠٠ م ، يريد أن يقسم به ثلاث مناطق زراعية مستطيلة الشكل ومتساوية المساحة في مزرعته كما هو موضح في الشكل. أوجد أكبر مساحة للمنطقة الواحدة يمكن أن يستخدم فيها السلك.

١٣) متوازي مستطيلات قاعدته مربعة الشكل مجموع أطوال جميع أحرفه تساوي ١٢٠ سم. أوجد أبعاد متوازي المستطيلات التي تجعل حجمه أكبر ما يمكن.

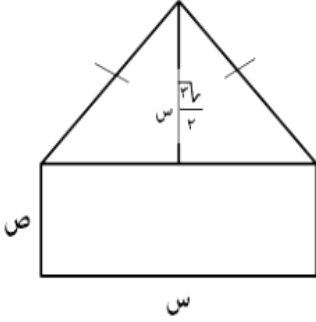
١٤) صفيحة معدنية على شكل مستطيل بعدها ١٠ ، ١٦ قُطعت من أركانها الأربعة ٤ مربعات متساوية ثم نُثبتت الأجزاء البارزة لتكون صندوقاً على شكل متوازي مستطيلات بدون غطاء. أوجد طول ضلع المربع المقطوع ليكون حجم الصندوق أكبر ما يمكن.

١٥) صحيفة من الورق مستطيلة الشكل مساحتها ٣٢ سم^٢ يراد طباعة إعلان عليها ، فإذا كان عرض كل من الهامشين في رأس الورقة أسفلها يساوي سنتيمتر واحد ، وفي كل من الجانبين $\frac{1}{3}$ سم. فأوجد بعدي الورقة بحيث تكون المساحة المطبوعة أكبر ما يمكن.

١٦) ملعب على شكل مستطيل ينتهي بنصفي دائرة، فإذا كان محيط الملعب ٢٤٠٠ م، فأوجد نصف قطر الدائرة لتكون المساحة أكبر ما يمكن.

١٧ مضمار للجري على شكل مستطيل ينتهي بنصفي دائرة ، فإذا كان محيطه ٤٠٠ م ، فأوجد نصف قطر الدائرة لتكون المساحة أكبر ما يمكن.

١٨ نافذة على شكل مستطيل يعلوه نصف دائرة فإذا كان محيط النافذة ٥م فأوجد بعدي المستطيل بحيث تسمح النافذة بدخول أكبر كمية من الضوء.



١٩ نافذة على شكل مستطيل يعلوه مثلث متطابق الأضلاع كما هو موضح بالشكل، إذا علمت أن محيط النافذة يساوي (١٢-٣√٢) متر، فأوجد بعدي المستطيل لتكون النافذة أكبر ما يمكن.

٢٠ طريق منحنى معادلته $v = \sqrt{s^2 - 2s + 5}$ ، يقف رجل عند النقطة (٥ ، ٠) ، أوجد أقصر مسافة يمشيها الرجل ليصل لنهاية الطريق.

٢١ أوجد أقرب نقطة إلى النقطة (٣ ، ١) وتقع على المنحنى: $v^2 - 2v + 4s - 23 = 0$

٢٢ أرض زراعية تسع ٢٥ شجرة ويكون المحصول ٤٥٠ ثمرة لكل شجرة فإذا زاد عدد الأشجار ينقص المحصول عن كل شجرة ١٠ ثمرات ، أوجد عدد الأشجار التي يمكن إضافتها بحيث يكون المحصول أكبر كمية ممكنة.

٢٣ مكتبة تبيع ٢٠٠ كتاب من نوع واحد ، وتكسب في الكتاب الواحد ٣ريالات ، فإذا زاد عدد الكتب المباعة عن هذا القدر فإن المكتبة تُعطي خصماً تصاعدياً يقل بمقدار ١٠ بيسات لكل كتاب زيادة. أوجد عدد الكتب التي تبيعها المكتبة لتحقيق أكبر ربح ممكن.

٢٤ أوجد أكبر حجم لأسطوانة دائرية قائمة إذا كانت المساحة الكلية لسطحها تساوي 24π سم^٢.

٢٥ في أحد المصانع يراد صناعة خزان قاعدته مربعة وبدون غطاء بحيث يتسع لأربعة أمتار مكعبة من الماء ، في حين تتكلف المادة التي يُصنع منها الخزان ٥ريالات للمتر المربع الواحد. أوجد أبعاد الخزان التي تجعل تكلفته أقل ما يمكن.

٢٦ حوض لتربية الأسماك على شكل متوازي مستطيلات بعدا قاعدته هما س ، ص وارتفاعه ٢م وحجمه ٢٠٠م^٣ ، نريد تبليطه من الداخل ، فإذا كانت تكاليف المتر المربع من الجوانب ٣ريالات ومن القاعدة ٥ريالات. أوجد أبعاد الحوض لتكون تكاليف التبليط أقل ما يمكن.

مراجعة الوحدة الثانية

أسئلة اختبارات الأعوام : ٢٠٠٩ - ٢٠١٩

اختبار ١٨-١٩ دور أول

٥) إذا كانت د(س) = $س^٢ - ٢س$ ، ه(س) = $س + ١$ وكانت ق(س) = $(٥٥ هـ)$ (س) فإن متوسط معدل تغير الدالة ق على الفترة [١ ، ٢] يساوي :

- ١ ٢ ٣ ٧

٦) إذا كانت ص = $٢ع + ٤ع - ١$ ، س = $٢ع - ١$ فإن $\frac{ص}{س}$ عند س = ١ تساوي :

- ٢ ٣ ٦ ١٢

٧) إذا كانت العلاقة بين سرعة جسيم ع(ن) والمسافة المقطوعة ف(ن) خلال الزمن ن بالثواني هي ع(ن) × ف(ن) = ١ - ن ، فإذا كانت ع(١) = ٢ م/ث فإن تسارع الجسيم عند ن = ١ يساوي :

- ٣- $\frac{١}{٢}$ ١ ٣

٨) إذا كان المستقيم ص = $٥س + ٣$ مماساً لمنحنى الدالة د(س) = $٢س^٢ + س - ٣$ فإن قيمة ج تساوي :

- ٥- ١ ٣ ٥

٩) إذا كانت د(س) = $س^٢ × هـ(س^٢ - ٢س + ٢)$ حيث هـ(٢) = ٤ ، هـ(٢) = ١ - فإن د'(٠) تساوي :

- ٤- ١- صفر ٤

١٠) إذا كانت د(س) = $س^٢ + ٢س - ١$ ، نها $\lim_{س \rightarrow ١} \frac{س^٢ + ٢س - ١}{س - ١} = \frac{٢}{١}$ فإن قيمة م تساوي :

- ٢- ١

١٨) يتسرب غاز من بالون كروي فإذا كان معدل التغير في نصف قطر البالون ٢ سم/ث ، فأوجد معدل التغير في حجم البالون في اللحظة التي تكون مساحة سطحه تساوي ٤٤٤π سم^٢/ث .

(علما بأن مساحة سطح الكرة = $٤\pi ر^٢$ ، حجم الكرة = $\frac{٤}{٣}\pi ر^٣$)

١٩) أوجد فترات التزايد والتناقص لمشتقة الدالة د(س) = $س^٤ - ٤س^٣ + ٥$

٢٠) أوجد معادلة المماسين المرسومين من النقطة (٠ ، ٧) للدائرة $س^٢ + ص^٢ - ٤ص - ٥ = ٠$

٢١) أوجد احداثيات النقط التي تقع على المنحنى $س^٢ = ٤ص + ٩$ وتكون أقرب ما يمكن للنقطة (٢ ، ٠)

٢٢) إذا كانت د(س) = $(س^٢ + ١)^٢$ فأوجد د'(١)

٢٣) إذا كانت ص = $\sqrt{٨ - س^٢}$ ، س ≤ ٢ فأثبت إن $\sqrt{٢ص} = ٩س^٢$

اختبار ١٧-١٨ تدريب

(٥) قذف جسم رأسياً إلى أعلى حسب العلاقة $f(t) = 120 - 5t^2$ ، فإن الزمن الذي يحتاجه الجسم وهو صاعد حتى تبلغ سرعته نصف السرعة التي قذف بها يساوي :

- ٤ ٦
 ٦٠ ١٢٠

(٦) إذا كان $v = d(t)$ ، $\Delta v = 3$ س ، $\Delta t = 2$ س ، فإن $\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{3}{2}$ يساوي :

- ١٢ ١٢-
 $\frac{1}{12}$ $\frac{1}{12}$ -

(٧) إذا كان متوسط التغير للدالة $d(t)$ في الفترة $[1, 3]$ يساوي ٥ ، وكان $d(1) \times d(3) = 12$ ، وكان $d(t) = \frac{1}{t}$ ، فإن قيمة متوسط التغير للدالة $d(t)$ في الفترة نفسها تساوي :

- $\frac{5}{12}$ $\frac{5}{12}$ -
 $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{5}$ -

(٨) إذا كان المماس للمنحنى $d(t) = 2t^2$ عند $t = 2$ ، يوازي القطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين $(1, 1)$ و $(p, d(p))$ ، فإن قيمة p تساوي :

- ٧ ٥
 ٤ ٣

(٩) إذا كان $\frac{d^2v}{dt^2} = 5t + 1$ ، $\frac{dv}{dt} = \frac{5}{2}t^2 + 6$ ، عند $t = 9$ ، فإن $\frac{d^2v}{dt^2} = \frac{5}{2}$ يساوي :

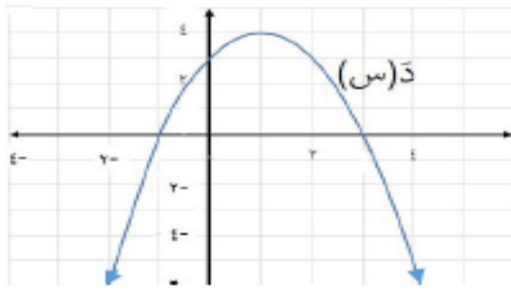
- صفر ١٥
 $\frac{5}{2}$ $\frac{3}{2}$

(١٠) إذا كان $v(t) = 12 + 4t^2$ ، فإن $v'(t) = 8t$ تساوي :

- ١٤ ٢
 ٢- ١٤-

(٢) إذا كان $s = 2t + 2t^2$ ، فاثبت أن $v = (s + 2) \left(\frac{v}{s} \right)^2 = 4$

٣) الشكل المقابل يمثل المخطط البياني للدالة $D'(s)$ المعرفة في الفترة $[-10, 10]$ ، من الرسم أوجد



- فترات التزايد والتناقص

- نقاط القيم العظمى والصغرى المحلية

٣) إذا كان المستقيم $s + 3 = 1$ يمس المنحنى $D(s) = s^2 + 2s + 3$ عند النقطة $(1, D(1))$ ، فأوجد قيمة كل من p, b .

١) إذا كان $M(s) = \frac{D(s) + s}{D(s)}$ ، $h(s) \neq 0$ ، وكان لمنحني $D(s)$ ، $h(s)$ مماساً مشتركاً أفقياً عند النقطة $(3, D(3))$ ، فأوجد $M'(3)$.

٢) أوجد مساحة أكبر مستطيل يمكن رسمه بحيث يكون أحد رؤوسه نقطة الأصل والثاني على محور السينات والثالث على محور الصادات والرابع على المنحنى $s = 4 - 2s$.

اختبار ١٦ - ١٧ تدريبي

٤) إذا علمت أن $Q(2) = 1$ ، فإن $\frac{Q(2) - Q(1)}{2 - 1}$ تساوي:

١ ٢ ٤ ٦

٥) إذا علمت أن $Q(s) = [4s + 1]^2$ ، فإن $Q'(3)$ =

٢ ٤
 غير موجودة صفر

٦) إذا كانت $h(s) = (3s)^2$ وكان $h'(s) = 2$ فإن $h'(3)$ تساوي:

٤ ٢
 ١٦ ٨

٧) إذا كان متوسط تغير الدالة $Q(s)$ في الفترة $[3, 5]$ يساوي ١٠ وكان $Q(3) = 5$ فإن قيمة $Q(5)$ تساوي:

٥ ٢٠
 ٢٠ ١٠

٨) قذف جسم رأسيا إلى أعلى بحيث يقاس ارتفاعه حسب العلاقة $f = 4t - 2t^2$ ، $0 < t$.
إذا كان أقصى ارتفاع وصل إليه الجسم يساوي ٣٢ مترا فإن قيمة t تساوي:

$$\begin{array}{l} 8 \quad \square \\ 32 \quad \square \end{array} \quad \begin{array}{l} 4 \quad \square \\ 16 \quad \square \end{array}$$

٩) إذا كان $v = \frac{1-t}{1+t}$ ، $s = \frac{1+t}{1-t}$ فإن $\left(\frac{v}{s}\right) =$

$$\begin{array}{l} \frac{1}{4} \quad \square \\ \frac{1}{2} \quad \square \end{array} \quad \begin{array}{l} \frac{1}{3} \quad \square \\ \text{صفر} \quad \square \end{array}$$

١٠) إذا كان $v = \sqrt{s}$ فإن $\frac{v}{s} =$ (ص ص) تساوي:

$$\begin{array}{l} \frac{1}{\sqrt{s}} \quad \square \\ 1 \quad \square \end{array} \quad \begin{array}{l} \frac{1}{s} \quad \square \\ \text{صفر} \quad \square \end{array}$$

١٧) إذا كان $v = (2-s)^2 = \sqrt{(s+6)^4}$ ، $s < 0$

أوجد $\frac{v(7+h) - v(7)}{h}$ **هنا**

١٨) إذا كانت $v = \frac{s}{1-s}$ أثبت أن $v' = (1-s)^{-2}$

١٩) إذا كان منحنىي الدالتين $d(s) = s^2 + 2s + b$ ، $h(s) = s^2 - s^3 + s + c$

متماسين عند النقطة $(-1, 0)$ فأوجد قيمة a ، b ، c .

٢٠) يتساقط رمل مكونا على شكل مخروط دائري على الأرض بمعدل $12 \text{ م}^3/\text{ث}$ ارتفاعه دائما يساوي ربع قطر قاعدته،
أوجد طول ارتفاع المخروط عندما يكون معدل زيادة ارتفاعه تساوي $3 \text{ م}^3/\text{ث}$

٢٢) إذا كان $q(s) = 3s^2 - 2s^3$ ، $s \in [0, 2]$ فجد كلا مما يأتي:

(أ) فترات التزايد و التناقص للدالة $q(s)$

(ب) القيم القصوى المحلية للدالة $q(s)$ (إن وجدت)

٢٣) صندوق بلا غطاء قاعدته مربعة الشكل حجمه 32 م^3 . أوجد أبعاد الصندوق لتكون كمية المادة المستخدمة لصنعه أقل ما يمكن؟

٥) إذا كانت هـ(س) كثيرة حدود من الدرجة ن، وكان متوسط معدل تغيرها دائماً يساوي ٣ فإن قيمة ن تساوي:

(أ) ٣ (ب) ٢ (ج) ١ (د) صفر

٦) إذا كان المستقيم ص = س + ٤ مماساً للمنحنى هـ(س) عند س = ١ وكان ق(س) = $\frac{هـ(س)}{س^٢}$ فإن ق(١) =

(أ) ٢ (ب) ٢- (ج) $\frac{١}{٢}$ (د) $\frac{١}{٢-}$

٧) خزان على شكل مكعب طول ضلعه ٢ م يصب فيه ماء بمعدل 0.4 م^٣/ث، معدل ارتفاع الماء في الخزان بـ (م/ث) يساوي:

(أ) 1.6 (ب) ٤ (ج) $\frac{١}{١٠}$ (د) ٨

٨) إذا كانت للدالة د(س) = $\frac{١}{س} + ٢س + ٤$ نقطة حرجة عند س = $\frac{١}{٢}$ فإن قيمة د تساوي:

(أ) ٨ (ب) ٤ (ج) ٢ (د) ١

٩) إذا كانت د(س) = ٢س^٢ + ١، ع(س) = س + ١ وكانت ل(س) = د(س) × ع(س) فإن ل'(١) =

(أ) ١٣ (ب) ١١ (ج) ٧ (د) ٥

١٠) إذا كانت ع(س) = $\frac{١}{س} \sqrt{٢س + ٤}$ ، هـ(١) = ٣، هـ'(١) = ٢ وكانت (ع ∘ هـ)'(١) = $\frac{١}{٤}$ فإن قيمة د تساوي:

(أ) ٢ (ب) ٣ (ج) ٤ (د) ٧

١١) إذا كانت د(س) = ٢س^٣ + ٦س^٢ - ٩س فأوجد د'(٢)

٢٠) اوجد معادلة المماس للمنحنى (٢س + ص)^٢ + س + ص = ٤٠ عند نقط تقاطع المنحنى مع المستقيم ٢س + ص = ٦

٢٢) إذا كانت س^٢ = ص(١ - س) فأثبت أن $\frac{ص}{س} + \frac{ص^٢}{٢س^٢}$

٢٢) يتحرك جسيم وفق العلاقة $٢ = ع \sqrt{٢ف}$ ، عدد ثابت. أثبت أن التسارع ثابت

٤) إذا كانت ق(س) حدودية من الدرجة الثانية، وكانت نهايتها $\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{ق(س) + ١٦}{٢(٤ - س)} = ١$ ،

فإن نهايتها $\lim_{s \rightarrow \infty} ق(س)$ تساوي:

- ∞ ٤
 صفر ١٦ -

٥) إذا كانت د(س) = $٤س^٢ - ١$ وتغيّرت س من ١ إلى ٢، فإن متوسط معدّل تغيّر د(س) يساوي:

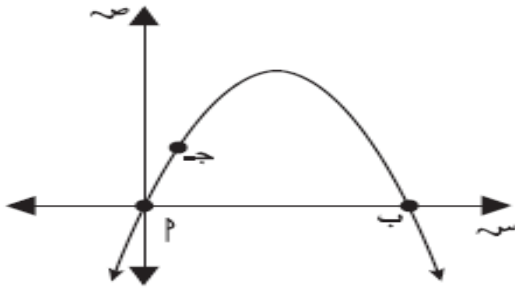
- ١٦ ١٢
 ٨ ٤

٦) إذا كانت د(س) = $٢س^٢ - ٢س$ ، فإن د'(٢) تساوي:

- ٢- صفر
 ٤ ٨

٧) يتحرك جسيم وفق دالة المسافة ف(ن) = $٢ن + ٥$ ، حيث ف هي المسافة التي يقطعها الجسيم بعد ن ثانية، فإن سرعة الجسيم عند اللحظة ن = ٣ ثوانٍ تساوي:

- ٢٤ ١١
 ١٠ ٢



٨) الشكل المجاور يمثّل منحنى $ص = ٤س - ٢س^٢$ ، وكانت النقطة ج تقع على المنحنى في الفترة [ب، ج]، فإن أكبر مساحة ممكنة للمثلث ب ج ج عندما يكون الإحداثي السيني للنقطة ج يساوي:

- $\frac{٢}{٣}$ $\frac{٣}{٢}$
 ٢ ٣

٩) إذا كانت ع(س)، ق(س) دوالاً قابلةً للاشتقاق على مجالها، حيث ع(س) = $(٢ + ٣س) \times ق'(س)$ ، ق'(١) = ٥، ق'(١) = ٦، فإن ع'(١) تساوي:

- ٥١ ٤٥
 ٤٣ ١٨

١٠) إذا كان ق(س) = $(٢ + ل)س^٢$ ، حيث ل $\in \mathbb{R}$ ، ق'(١) = -٤، فإن قيمة ل تساوي:

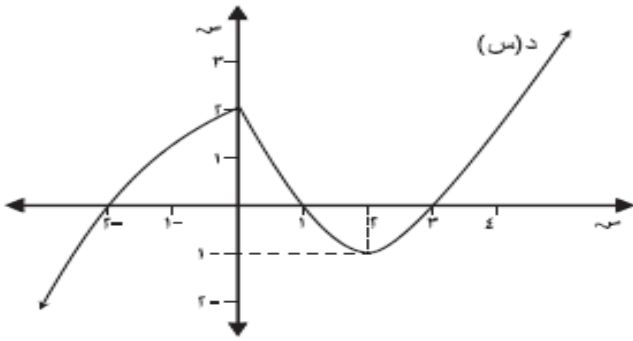
- ٨ ٤
 ٤- ٨-

(١٧) استخدم التعريف $\frac{د(ص)}{ص} = \frac{د(س+هـ) - د(س)}{هـ}$ لإيجاد $\frac{د(ص)}{ص}$ للدالة $د(س) = س + ٢$ ، عند $س = ٤$

(١٨) إذا كانت $س = \frac{ص}{١-ص}$ ، فأوجد $ص$ عند $ص = ٢$

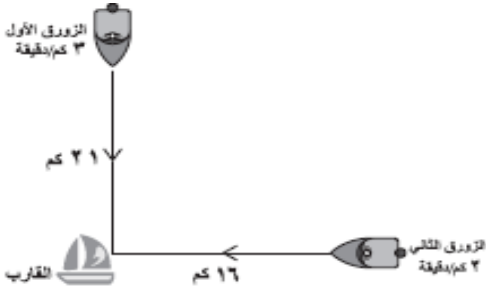
(٢٠) أوجد النقاط الواقعة على المنحنى $ص^٢ + ٣س^٢ = ٢٧$ ، والتي يكون عندها المماس للمنحنى موازياً لمحور الصادات.

(٢٢) الشكل المجاور يمثل بيان الدالة $د(س)$ على ح ، أوجد :



(أ) فترات التزايد للدالة $د(س)$.

(ب) النقاط الحرجة.



(٢٣) تحرك زورقاً إنقاذ نحو قارب، حيث يبعد القارب عن الزورق الأول ٢١ كم جنوباً، وعن الزورق الثاني ١٦ كم غرباً، إذا كان معدل اقتراب كلاً من الزورقين من القارب ٣ كم/دقيقة ، ٢ كم/دقيقة على الترتيب. أوجد معدل تغير المسافة بين الزورقين بعد مُضي ٦ دقائق من لحظة انطلاقهما.

اختبار ١٤ - ١٥ تدريبي

٥) إذا كانت د(س) = س + ٢ ، فإن نها $\frac{د(هـ) - د(٥)}{هـ}$ تساوي :

(أ) صفر (ب) ١ (ج) ٢ (د) ٣

٦) إذا كانت ق(س) = |س - ٤| ، فإن ق'(٢ -) تساوي :

(أ) ٦ - (ب) ١ - (ج) ١ (د) ٦

٧) إذا كانت (هـ د) = (٣)' ، ١٥ = (٣)' ، حيث هـ (س) = س^٢ - ٩ ، فإن د(٣) تساوي

(أ) صفر (ب) $\frac{٣}{٢}$ (ج) $\frac{٢}{٣}$ (د) ٣

٨) إذا كان ق(س) × هـ (س) = ١ ، هـ (١) = ٢ - ، هـ'(١) = ٣ ، فإن قيمة ق'(١) تساوي :

(أ) $\frac{٣}{٢}$ (ب) $\frac{٣}{٤}$ (ج) $\frac{٣-}{٤}$ (د) $\frac{٣-}{٢}$

(معادلة المماس لمنحنى الدالة د(س) = س^٢ - ٣س + ١ الذي يعامد المستقيم الذي معادلته س + ٣ص + ١٥ = ٠ هي :

(أ) ص - ١ = ٣س (ب) ص - ١ = ٣س

(ج) ص - ١ = ٣(س - ٣) (د) ص - ١ = ٣(س - ٣)

١٠) إذا كانت ق(س) = س^٥ ، ق'''(س) = ١٢٠س ، فإن قيمة ١٢ تساوي :

(أ) ٢٤ (ب) ١٢ (ج) ٣ (د) ١

١٧) إذا كان : س ص - ٣ = س^٢ ، أثبت أن : س ص + ٢ص = ٦ .

١٨) إذا كانت د(س) = (س - ٦)^٢ - ٤ حيث س ∈ [١، ٧] ، فأوجد القيم القصوى و بين نوعها .

٢٠) إذا كانت ف(ن) المسافة التي يقطعها جسم حيث ف(ن) = ن^٢ (ن - ٦) م / ث ،

أوجد سرعة الجسم عندما يكون تسارعه ١٨ م / ث^٢ .

٢٢) بالون كروي الشكل يزداد حجمه نتيجة لنفخه ، فإذا كان معدل ازدياد طول نصف قطر البالون

يساوي $\frac{٢}{٥}$ سم / دقيقة ، أوجد معدل ازدياد حجمه عندما يكون طول نصف قطره يساوي ٥ سم .

٢٣) لتكن السرعة المتوسطة لدالة المسافة ف(ن) في الفترة الزمنية [١، ٤] تساوي ٣ ، وكان

ف(١) + ف(٤) = ١٢ ، أوجد السرعة المتوسطة للدالة هـ (س) = ف(س) في الفترة نفسها .

اختبار ١٤ - ١٥ دور أول

(٥) متوسط معدّل التغير للدالة $h(s) = 7 - s$ بين $s = 1$ ، $s = 0$ يساوي :

- ٢٨ - $7 -$
 صفر $4 -$

(٦) إذا كانت $q(s) = m^2 s^4$ ، حيث m عدد حقيقي ، فإن $q'(s)$ تساوي :

- $4m^2 s^3$ $24m^2$
 $4m^2 s^4$ $2m^4 s$

(٧) إذا كانت $d(s) = s^2 + 1$ ، فإن $d'(s)$ تساوي :

- 2 4
 $8 -$ $2 -$

(٨) لتكن العلاقة بين سرعة جسيم $v(t)$ ، والمسافة المقطوعة $f(t)$ خلال الزمن t

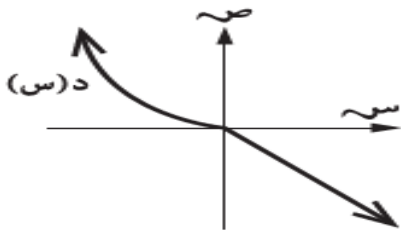
هي $f(t) = 3t^2 + 4$ ، $v(t) \neq 0$ ، فإن تسارع الجسيم يساوي :

- 6 5
 $\frac{5}{3}$ $\frac{5}{6}$

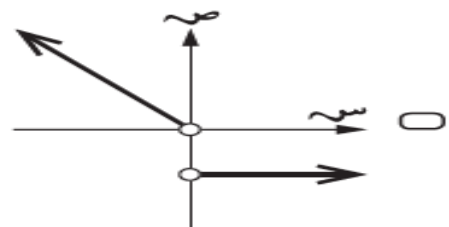
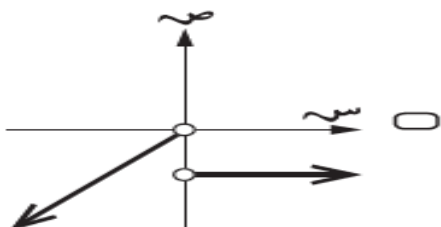
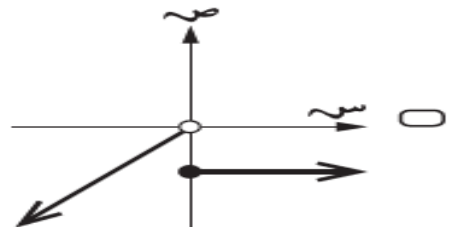
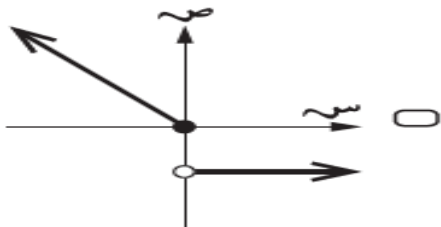
(٩) إذا كانت $q(s)$ كثيرة حدود حيث أن $q(s) = s^3 + h(s)$ ، وكان للدالة $q(s)$

قيمة قصوى محلية عند $s = 2$ ، فإن $h'(2)$ تساوي :

- $12 -$ $2 -$
 صفر $8 -$



(١٠) الشكل المقابل يُمثل بيان الدالة $d(s)$ ، فإن الشكل الذي يُمثل بيان $d'(s)$ هو :



متعة الرياضيات

(١٧) أوجد ميل المماس للدالة $ق(س) = س^٣ + س^٢ + س + ١$ عند النقطة $(١, ٤)$

مع: أحمد هجرس

(١٨) إذا كانت $ص^٢ - ٢سص = ٣$ ، فأوجد $ص$ عند $ص = ٣$

(٢٠) مصنع يبيع عدد $س$ من الطابعات في الشهر بسعر $(٨٤٠ - ١٠س)$ ريالاً عمانياً للطابعة الواحدة. إذا كانت التكاليف الكلية الشهرية لهذه الطابعات هي $(٥٠٠ + ١٤٠س + ٢س٤)$ ريالاً عمانياً، فأوجد عدد الطابعات التي يبيعها المصنع شهرياً ليكون الربح أكبر ما يمكن.

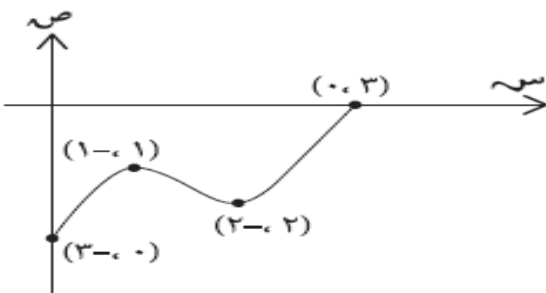
(٢٢) عيّن فترات التزايد والتناقص للدالة $ص = د(س)$ حيث $د(س) = \frac{صص}{س}$ $(١ + ٢س)(٢س - ٤)$

(٢٣) مستطيل طوله $س = ١٩$ سم، وعرضه $ص = ٧$ سم. إذا كان طول المستطيل يتناقص بمعدل ١ سم / ثانية، وعرضه يتزايد بمعدل ٢ سم / ثانية، فاحسب معدل التغير في مساحة المستطيل في اللحظة التي يكون فيها المستطيل مربعاً.

اختبار ١٤ - ١٥ دور ثاني

(٥) إذا كانت $ص = (١ + ٣س)^٢$ ، فإن $\frac{دص}{دس}$ تساوي:

- $٢(١ + ٣س)$ $٦(١ + ٣س)$
 $٦س + ١$ $٣س + ١$



(٦) إذا كان الشكل المقابل يُمثّل بيان الدالة $ل(س)$ في الفترة $[٠, ٣]$ ، فإن القيمة العظمى المطلقة للدالة في هذه الفترة تساوي:

- ٣
 صفر
 ١ -
 ٣ -

(٧) ميل المستقيم العمودي على مماس منحنى الدالة $د(س) = س^٢ - س$ عند النقطة $(١, ٠)$ يساوي:

- ٢ - ١ -
 ١ ٢

(٨) تتحرك نقطة على منحنى الدالة $ص = س^٢ + ٣س - ٤$ ، فإن قيمة $ص$ التي يتساوى عندها معدل تغير الإحداثي السيني بالنسبة للزمن مع معدل تغير الإحداثي الصادي بالنسبة للزمن هي:

- $\frac{٢٧}{٤}$ ٦ -
 $\frac{٣}{٢}$ ١ -

٩) إذا كانت ق (١ -) = هـ (١ -) = ٣ ، ق (١ -) = ٨ ، $\left(\frac{ق}{هـ}\right)^{-١} = -٤$ ، فإن هـ (١ -) تساوي:

- ٢٠ ١٢
١٢ - ٢٠ -

١٠) إذا كانت ع (ل (س) = س ، وكانت ع (س) ، ل (س) دالتين قابلتين للاشتقاق على مجالهما بحيث أن ع (س) = $\frac{١}{س}$ ، فإن ل (س) تساوي:

- س (ل (س)) ل (س)
٢ ل (س) ل (س)

١٧) إذا كانت ص^٢ = س ص ، فأوجد $\frac{ص}{س}$.

١٨) إذا كانت ق (س) متصلة على ح حيث ق (س) = $\left. \begin{array}{l} س^٤ + ٥ ، س > ١ \\ س^٢ + ٤ ، س \leq ١ \end{array} \right\}$ ، فأوجد:

أ) متوسط مُعدّل التغير للدالة ق (س) عندما تتغير س من صفر إلى ٣ .

ب) مُعدّل التغير للدالة ق (س) عند س = ٢ .

٢٠) إذا كان ق (٣) = ٨ ، فأوجد:
نهبا $\frac{ق(٣ + م) - ق(٣ - م)}{م}$

٢٢) يتحرك جسيم وفق الدالة ف (ن) = $٢ن^٢ - ٩ن + ١٥$ حيث ف المسافة بالأمتار، ن الزمن بالثواني. أوجد تسارع الجسيم بعد ٣ ثواني من بدء الحركة.

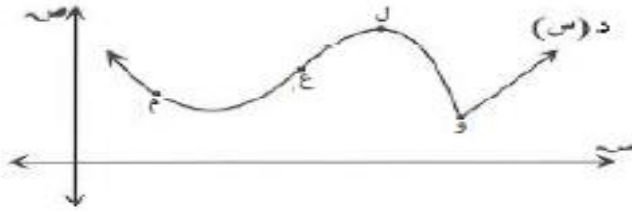
٢٣) إذا كانت د (س) = $\frac{هـ(س)}{ل(س)}$ ، ل (س) ≠ صفر، بحيث أن هـ (س) ، ل (س) دالتين

قابلتين للاشتقاق على مجالهما، وكان د (٢) = د (٢) = صفر .

أثبت أن: د (٢) = $\frac{هـ(٢)}{ل(٢)}$

اختبار ١٣ - ١٤ دور أول

٥) إذا كان الشكل المجاور يمثل بيان الدالة د(س) ، فإن النقطة التي يكون عندها د(س) > ٠ هي :



و ل

ع م

٦) إذا كانت $v = ٢^٢ + ٢٤ + ٥$ ، $٢ = ٩ - s$ ، فإن قيمة $\frac{v}{s}$ عندما $٢ = ١$ تساوي :

٧- ٣- ٣ ٧

٧) إذا كانت الدالة د(س) قابلة للاشتقاق لكل $s \in \mathbb{R}$ ، وكان Δv لها يساوي

$٢s^٢ + ٣s^٢ + ٨s + ٢$ ، فإن د'(٢) تساوي :

صفر ١٤ ٢٨ ٣٤

٨) إذا تحرك جسيم وفق دالة المسافة $f(n) = ٩n^٢ - ٩n - ٣$ ، حيث f المسافة

بالأمتار، n الزمن بالثواني ، فإن معدّل التغير في سرعته عندما $n = ٤$ يساوي :

٣١ ٢٤ ٦ ٣

٩) إذا كان $q(s) = ٢ + s$ ، $٢ = (١) - h$ ، $٥ = (١) - h$ ، $٢٠ = (١) - h$ ،

فإن قيمة q تساوي :

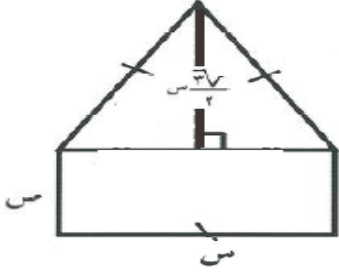
٥- ١- ١ ٥

١٠) إذا كانت $l(٢s) = s \times h(س)$ ، $l(٢-) = l(٢-) = ٣$ ، فإن $h(١-)$ =

٩ ٦ ٦ ٩-

١٦) إذا كان $d(س) = ٣ + s$ ، فأوجد متوسط معدّل التغير للدالة د(س) في الفترة $[٢٤٣ - ٢٤٢]$

١٨) دائرتان متحدتان في المركز، نصف قطرهما ٦ سم ، ٢٤ سم ، ابتدأت الدائرة الصغرى تتسع بحيث يزداد نصف قطرها بمعدل ٢ سم / ث ، وفي اللحظة نفسها أخذت الدائرة الكبرى تصغر بحيث يتناقص نصف قطرها بمعدل ٤ سم / ث ، أوجد معدل التغير في المساحة المحصورة بين الدائرتين في اللحظة التي يكون فيها نصف قطر كل منهما مساوياً ١٢ سم . (علماً بأن مساحة الدائرة = πr^2)



٢٠) نافذة على شكل مستطيل يعلوه مثلث متطابق الأضلاع كما هو موضح بالشكل ، إذا علمت أن محيط النافذة يساوي $(12\sqrt{3} - 12)$ متر، فأوجد بعدي المستطيل لتكون مساحة النافذة أكبر ما يمكن .

٢٢) أوجد النقاط الحرجة في مجال الدالة: $D(s) = s^2 - 12s$

٢٣) إذا كان $s = s^2 + 2s$ ، أثبت أن $s^2 + (2 + s)s + 4 = 0$ صفر

اختبار ١٣ - ١٤ دور ثاني

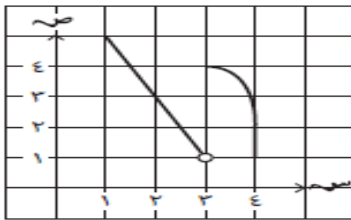
٥) إذا علمت أن $f(x) = x^2 - 8x + 12$ ، فإن نها $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{f(x)}{x-7}$ - ق (٣) - هـ - ق (٣)

$\frac{7}{8}$

$\frac{8}{7}$

$\frac{8}{7}$

$\frac{7}{8}$



٦) الشكل المجاور يمثل بيان الدالة $f(s)$ المعرفة على الفترة $[1, 4]$ ، فإن النقطة $(3, 3)$ هي نقطة:

عظمى مطلقة

صغرى مطلقة

صغرى محلية

عظمى محلية

٧) إذا كان $D(s) = \begin{cases} s^2 - 7s + 10 & 0 \leq s < 2 \\ s^2 - 5s + 6 & 2 \leq s < 4 \end{cases}$ ، فإن متوسط معدل التغير عندما تتغير s من ١ إلى ٣ تساوي:

٣

٢

٦

٤

٨) إذا تحرك جسيم في خط مستقيم بحيث أن بعده عن نقطة الأصل بالأمتار بعد n ثانية من بدء حركته تعطى بالعلاقة $f(n) = 2n^2 - 6n + 4$ ، $0 \leq n$ ، فإن المسافة التي يقطعها الجسيم عندما يندعم تسارعه تساوي:

١٨

٣٤

٢

٤

٩) إذا كانت ق (س) = $س^٢ + س$ ، وكان هـ (ق) = $(٢)^\sqrt{ق}$ ، فإن هـ (٦) =

١١

$\frac{٥٥}{٦}$

٥٥

$\frac{٥٥}{٤}$

١٠) إذا كانت د (س) = $س^٤ - ٥س^٢ + ٦$ ، وكان هـ نها $\frac{د(٢) - د(٢+٥هـ)}{هـ}$ ، فإن قيمة هـ تساوي:

٢

١

٢٤

١٢

١٧) إذا كانت د (س) = $\left. \begin{array}{l} ١٢ + س^٢ ، س \leq ٢ \\ س^٢ + ٨س ، س > ٢ \end{array} \right\}$ ، فأوجد د (٢) .

٢١) أنبوب من الحديد على شكل أسطوانة دائرية قائمة مجوف طوله ثابت ونصف قطريه الداخلي والخارجي يتغيران بحيث يبقى حجم الحديد ثابت فإذا كان نصف القطر الداخلي يزداد بمعدل $\frac{١}{٤}$ سم / د أوجد معدل التغير في قطره الخارجي عندما يكون نصف القطر الداخلي ٨ سم ونصف القطر الخارجي ١٠ سم . (علما بأن حجم الأسطوانة الدائرية القائمة = $\pi ر^٢ ح$ × ع)

٢٣) عيّن فترات التزايد والتناقص للدالة د (س) = $س^٣ + ٣س^٢ - ٩س + ٦$.

٢٤) إذا كان $ص = \frac{٥ + س^٢}{٤ + س^٣}$ ، $س \neq \frac{٤}{٣}$ ، فأثبت أن $ص^٢ - ٣ص = ٣(ص^٢)$

اختبار ١٢ - ١٣ تدريبي

٥) إذا كان متوسط معدل تغير الدالة هـ (س) في الفترة [٤، ١] يساوي ٣ وكانت هـ (١) = م ، هـ (٤) = ١٣ ، فإن قيمة م تساوي :

٦

٢

٢-

٦-

٦) إذا كانت د (س) = $(س - \sqrt{٣})(س^٢ + ٣\sqrt{٣} + ٩)$ ، فإن نها $\frac{د(٢) - د(٢-٣)}{٣}$ =

٣٦

١٢

٤

صفر

٧) إذا كانت د(س) = $\frac{٢س^٢}{٣} - ٢س + ٤س$ وكان د'(١) = -١ ، فإن قيمة د تساوي :

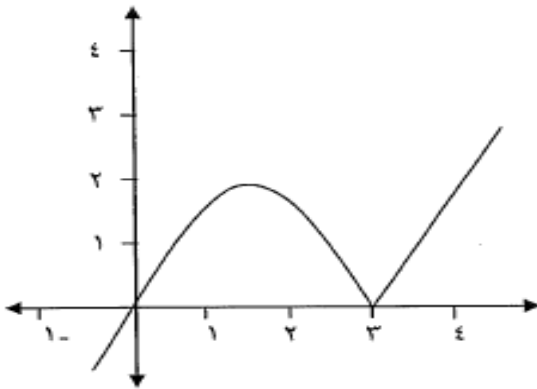
٤ ٢ $\frac{٤}{٣}$ $\frac{٣}{٤}$

٨) إذا كانت د(س) = ه(س) × (١ + س٣) ، د'(١) = ٢ ، د'(١) = $\frac{٥}{٣}$ ، فإن ه'(١) =

١ - $\frac{١}{٤}$ - $\frac{١}{٤}$ ١

٩) إذا كان الشكل المجاور يمثل منحنى الدالة د(س) المعرفة على $ع$ ، فإن عدد النقاط الحرجة للدالة د(س) يساوي :

٢ ١ ٣ صفر



١٠) إذا كانت ه(س) = ١ + س٢ ، ق(س) = ٢ + س٣ ، فإن ه'(١) / ق'(١) =

٣٦ ٣٢ ٢٤ ١٦

ج) ثلاثة اعداد طبيعية موجبة مجموعها ٢٦ ، إذا كان العدد الثاني هو ثلاث اضعاف العدد الاول فأوجد هذه الأعداد بحيث يكون مجموع مربعاتهم اصغر ما يمكن .

ب) يتحرك جسيم في خط مستقيم طبقاً للعلاقة ف(ن) = ٦ن٢ - $\frac{١}{٣}$ ن٣ ، حيث ن بالثواني ، ف بالمتري اوجد ما يأتي :

١. سرعة الجسيم عندما ن = ٥ ثواني .

٢. تسارع الجسيم عندما تتعدم سرعته

ج) خزان على شكل اسطوانة دائرية قائمة طول قطر قاعدتها ٥٠ سم ، وارتفاعها ١٢٠ سم ، يصب فيها الماء بمعدل $\frac{٥٠٠٠}{٤٠ + م}$ سم^٣/ثانية ، حيث م ارتفاع الماء عند أي لحظة .

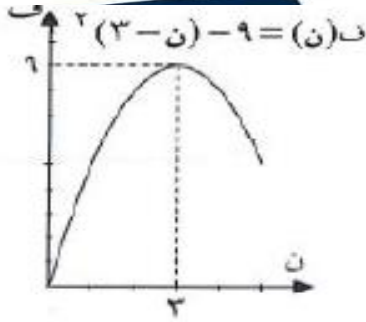
أوجد معدل ارتفاع الماء في الخزان عندما يمتلئ ربعه. (علماً بأن حجم الاسطوانة الدائرية القائمة = π نق^٢ ع)

١) إذا كانت $ص = د(س)$ ، $ع = \frac{\sqrt{٢س^٣}}{ص}$ فأثبت أن:

$$\frac{٢-}{٢ص ٢ع} = \frac{٢س}{٢س} \times ع + \frac{ع}{س} \times \frac{س}{س} \times ٢ + \frac{ع^٢}{٢س} \times ص$$

متعة الرياضيات

اختبار ١٢ - ١٣ دور أول



(٥) الشكل المجاور يمثل حركة جسيم وفق دالة المسافة $v(n)$ ، حيث n الزمن بالثواني. السرعة اللحظية عند $n=3$ ثواني تساوي:

- ٦ ٩
صفر ٣

(٦) إذا كانت $d(s) = \frac{s^2 - 4}{s}$ ، فإن جميع قيم s التي توجد عندها نقاط حرجة للدالة $d(s)$ هي:

- $\{2, 2-\}$ $\{0\}$
 $\{4, 2, 0, 2-\}$ $\{2, 0, 2-\}$

(٧) متوسط تغير الدالة $d(s) = |3-s|$ في الفترة $[1, 2]$ يساوي:

- ١ ٣
٣- ١-

(٨) إذا كانت $d(s) = s^2 + s$ ، $h = s$ ، $1 - s = h$ ، فإن $d(h) = d(s)$ =

- $s^2 - 2s$ $s^2 + s + 1$
 $1 - s^2$ $1 + s^2$

(٩) إذا كان $v = 3 - 2j$ ، $0 = 5 - s$ ، فإن $\frac{dv}{ds}$ تساوي:

- $2j$ $2j -$
 1 $1 -$

(١٠) إذا كان $d(1) = 3$ ، $d(1) = 6$ ، فإن $\frac{d^2v}{ds^2}$ تساوي:

- $\frac{4}{3}$ $\frac{2}{3}$
 24 12

عين فترات التزايد وفترات التناقص للدالة $d(s) = \frac{1}{3}s^3 - 2s^2$.

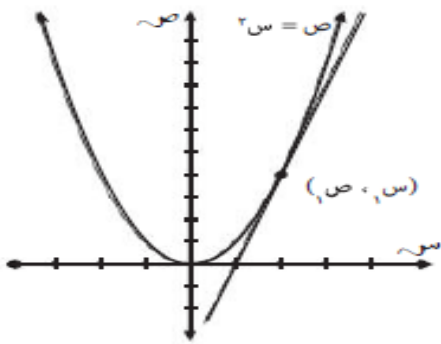
إذا كان محور السينات مماساً مشتركاً للدائرة $s^2 + (v - 2) = 0$ ونقطة $(2, 2s^2)$ والمنحنى $v = 2s^2$ ، وكانت المشتقة الثانية لكلٍ منهما متساوية عند نقطة التماس، فأوجد قيمة v .

إذا كان $v^2 - s = 1$ ، فأثبت أن $(2 - v - s^2) = 0$.

يُراد صناعة علبة زجاجية أسطوانية الشكل ذات غطاء معدني لتكون سعتها $\pi ٩٦$ م^٣. إذا كانت تكلفة المتر المربع الواحد من الزجاج ريالين وهي ضعف تكلفة المعدن، فأوجد ارتفاع العلبة (ع) ونصف قطرها (نق) لتكون تكلفة صنعها أقل ما يمكن. (علماً بأن مساحة الأسطوانة = $\pi ٢$ نق ع + $\pi ٢$ نق^٢، حجم الأسطوانة = π نق^٢ ع)

اختبار ١٢ - ١٣ دور ثاني

(٥) في الشكل المجاور ميل المماس لمنحنى الدالة $v = d(s)$ عند النقطة (s_1, v_1) يساوي :



$2s_1$
 s_1^2

s_1
 s_1

(٦) عدد النقاط الحرجة لدالة $d(s) = 2(s - 5)$ تساوي:

صفر
 ٢
 ٥
 ١

(٧) إذا كان متوسط التغير في الدالة $d(s)$ في الفترة $[3, 9]$ يساوي ٢ وكان $d(3) = 5$ ، $d(9) = 9$ فإن قيمة 9 تساوي :

٤
 ٩
 ٥
 ١٠

(٨) إذا كان $\sqrt{v} = 1 - s$ فإن $\frac{dv}{ds} =$

$2(1 - s)$
 $(1 - s)$
 $2(1 - s)$
 $(1 - s)$

(٩) إذا كان $d^{-1}(s) = (s)$ ، $h^{-1}(2) = 2$ فإن $d^{-1}(1) =$

٤
 ٢
 ٢
 ٤

(١٠) $\frac{h^{-1}(1)}{h^{-1}(2)} =$

٤
 $\frac{1}{2}$
 ٢
 $\frac{1}{4}$

أوجد القيم القصوى المحلية للدالة $d(s) = 2s^3 + 3s^2 - 12s$ وحدد نوعها **نحياً**

إذا كان المنطاد (أ) يبعد عن المنطاد (ب) بمسافة أفقية قدرها ٤ م، انطلقا المنطادان (أ) و (ب) رأسياً إلى الأعلى بسرعة ٢ م / ث ، ١ م / ث على الترتيب .

أوجد معدل التغير في المسافة بين المنطادين بعد مرور ٣ ثوان من بدء الانطلاق.

إذا كانت $(s + 1)^2 = s^2 + 2s + 1$ فاثبت أن : $s^2 + 2s + 1 = s^2 + 2s + 1$

$$(22) \text{ إذا كانت } d(s) = \begin{cases} 2s^2 + 3s & , s \leq 2 \\ 8 - s & , s > 2 \end{cases}$$

دالة متصلة على مجالها، فابحث قابلية الاشتقاق للدالة $d(s)$ (باستخدام تعريف المشتقة) عند $s = 2$



اختبار ١١ - ١٢ دور أول

(٥) إذا كانت $d(s) = 1 - s^2$ فإن **نها** $\frac{d(2) - d(1)}{2 - 1} =$

- ١٢ - ٦ - ٦ - ١٢ -

(٦) عند إلقاء حجر في بركة ماء تحدث موجات دائرية يزداد طول نصف قطر كل منها بمعدل $\frac{1}{4}$ م/ث، فالمعدل الذي تزداد به مساحة سطح إحدى الموجات التي طول نصف قطرها ٢ م بوحدة (م^٢/ث) يساوي:

- π π^2 π^4 π^8

(٧) إذا كانت $v = s^2 + s^3 + 2$ ، $l = s^2 - 1$ فإن $\frac{v}{l} \leq 1$ عندما $s = 1$ يساوي:

- ٢ ٣ ٦ ١٢

(٨) إذا كانت $d(s) = \left. \begin{array}{l} s^2 + 4s + 4 > 1 \\ s^6 < s \end{array} \right\}$ قابلة للاشتقاق عند $s=1$ ، فإن $d(2)$ تساوي:

- ٦ ١٢ ٢٠ ٢٤

(٩) إذا كانت $d(s) = \frac{s}{s+1}$ ، $s \neq 1$ فإن للدالة $d(s)$:

- نقطة حرجة واحدة نقطتين حرجتين
 ثلاث نقاط حرجة ليس لها نقاط حرجة

(١٠) إذا كانت $q(s) = \left. \begin{array}{l} s^2 - 5s < 0 \\ s^2 \geq 0 \end{array} \right\}$ فإن $q(s)$ متزايدة في الفترة:

- $[-\infty, 0[$ $]-\infty, 0[$ $]-\infty, 0[$ $]-\infty, 0[$

مضمار للجري على شكل مستطيل ينتهي بنصفي دائرة ، إذا كان محيطه 400 م ، فأوجد نصف قطر الدائرة لتكون المساحة أكبر ما يمكن.

أوجد النقاط التي يكون عندها المماس للمنحنى $v = s(1-s)^2$ موازياً لمحور السينات.

أوجد القيم العظمى والصغرى المحلية للدالة $d(s) = \left. \begin{array}{l} s^2 - 2s - 1 < s \geq 0 \\ s^2(1-s) > 0 \\ s - 3 < s \leq 2 \end{array} \right\}$

إذا كانت $d(s) = \frac{f(s)}{g(s)}$ حيث $l(s) \neq 0$ ، وكانت $h(s) = s^2 + s^3 + 2$ ،

$$l(s) = s^2 + 2$$

فأثبت أن $d'(s) = \frac{3}{4} h(s) - \frac{f(s)}{g(s)}$

اختبار ١١ - ١٢ دور ثاني

(٥) ميل المماس لمنحنى الدالة $v = s^2 - s + 3$ عند $s = 2$ يساوي:

- ٢ ٥
٦ ٧

(٦) إذا كان $d(s) = 3 - 2s$ ، وتغيّرت قيمة s من ١ إلى ٣ ، فإن متوسط معدل تغير الدالة يساوي:

- ٢- $\frac{1-}{2}$
١ ٢

(٧) إذا تدرجت كرة من أعلى جبل بحيث تكون المسافة التي قطعها بالأمطار عن نقطة البداية بعد n ثانية تعطى بالعلاقة $f = \frac{1}{3}n^2 - 2n + 2$ ، فإن سرعتها تبلغ ٨ م/ث عندما n تساوي:

- ١ ٢
٣ ٤

(٨) إذا كانت $d'(s) = \frac{1}{4}s^2$ وكانت $\frac{d}{ds} = \frac{d(4h + e) - d(4e)}{h}$ ، فإن قيمة h تساوي:

- ١ ٢
٤ ٨

(٩) إذا كانت $v = 2n^2 - 4$ ، $s = n^2$ فإن $\frac{dv}{ds}$ عندما $n = 2$ تساوي :

- ٣ $\frac{3}{4}$
٦ ٣

(١٠) إذا كانت $d(s) = \frac{s}{2-s}$ ، $s \in [-2, 1]$ فإن القيمة الصغرى المطلقة للدالة $d(s)$ تكون عندما s تساوي:

- ٢- ١-
صفر ١

إناء على شكل مخروط دائري قائم رأسه إلى أسفل ، طول نصف قطر قاعدته ٢ سم وارتفاعه ٦ سم يتسرب من رأسه الماء بمعدل ٣ سم^٣/ث . أوجد معدل تغير ارتفاع سطح الماء عندما يكون ارتفاع الماء فيه يساوي ٤ سم ، (علماً بأن حجم المخروط = $\frac{1}{3}\pi r^2 h$).

أوجد القيم العظمى والصغرى المحلية للدالة د(س) = $\left. \begin{matrix} \text{س}^١ - ٢\text{س}^٢ + \text{س}^٣ \\ \text{س}^٤ - ٢\text{س}^٣ + \text{س}^٢ \end{matrix} \right\}$

إذا كانت د(س) = $\text{س}^٣ - ٢\text{س}^٢ - ١$ ، هـ(س) = $\text{س}^٢ - ١$ فأثبت أن د(هـ) = ٢

إذا كانت $v = \sqrt{٢٣\text{س}^٢ + ٤}$ ، $u = (٢ + ٢\text{س})^٢$ فأثبت أن $\frac{dv}{ds} = \frac{du}{ds} + ٨ + ٥\text{س} - \frac{٤}{\text{س}}$

اختبار ٨ - ٩ دور أول

٥) إذا كان متوسط معدل التغير للدالة د(س) عندما تتغير س من ١ إلى م يساوي ٢ ، ومقدار التغير في الدالة يساوي ٦ ، فإن قيمة م تساوي :

- (أ) ١٣ (ب) ٤ (ج) $\frac{٣}{٢}$ (د) $\frac{٤}{٣}$

٦) يتحرك جسيم حسب العلاقة ف(ن) = $٢ن^٣ - ٣ن^٢$ حيث ف : المسافة بالسنتيمتر ، ن : الزمن بالثانية ، فإن سرعته اللحظية عند ٢ ثانية تساوي :

- (أ) ٤ (ب) ٦ (ج) ٨ (د) ١٠

٧) إذا كانت هـ(س) قابلة للإشتقاق على ح ، ق(س) = $٥ - ٤\text{س} \times \text{هـ}(س)$ ، بحيث أن هـ(٢) = ٣ ، هـ'(٢) = ١ فإن ق'(٢) تساوي :

- (أ) ٨ - (ب) ٤ - (ج) ٤ (د) ٨

٨) إذا كانت $\frac{د(س) + هـ(س)}{٤} = ٣ + ٢\text{س}$ فإن د'(١) تساوي :

- (أ) صفر (ب) ٢ (ج) ٤ (د) ٥

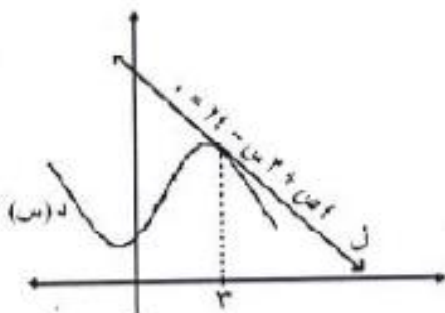
٩) إذا كانت ص دالة حدودية ، ص = د(ع) ، ع = $١ - ٢\text{س}$ ، (ص هـ ع) = ١٢ فإن ص'(٣) تساوي :

- (أ) ٣ (ب) ٢ (ج) $\frac{١}{٢}$ (د) $\frac{١}{٣}$

١٠) إذا كان الشكل المجاور يمثل منحنى د(س) حيث المستقيم ل

مماساً للمنحنى عند $\text{س} = ٣$ فإن د'(٣) تساوي :

- (أ) $\frac{٤}{٣}$ (ب) $\frac{٣}{٤}$



- (ج) صفر (د) $\frac{١٢}{٤}$

١) يصب عطر في زجاجة علم، شكل اسطوانة دائرية قائمة طول نصف قطرها يساوي ثلث ارتفاعها، فإذا كان معدل إنسياب العطر في الزجاجة هو $0,8$ سم^٣/ث. أوجد معدل ارتفاع مستوى العطر في الزجاجة عندما يكون ارتفاعه ٢ سم. (حجم الأسطوانة $ح = \pi r^2 h$)

٢) إذا كانت $س = س + ص + ٥$ ، أثبت أن $ص = \frac{(١-س)^2}{س}$

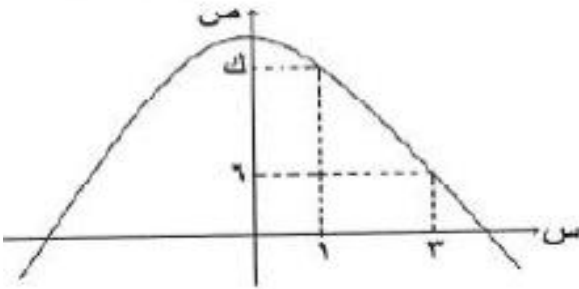
١) إذا كانت $د(س) = \left. \begin{array}{l} ٥ - س \\ ١ - س \end{array} \right\}$ منصلة على $ح$

فاوجد $د'(١)$ (المشتقة اليمنى) باستخدام التعريف.

١) يريد خياط ملابس نسائية تقسيم قطعة قماش طولها ١٢ م إلى قطعتين لعمل فستان بحيث يكون مربع طول إحدى القطعتين مضافاً إليه ثلث مكعب طول القطعة الأخرى أصغر ما يمكن. أوجد طول كل من القطعتين.

ب) إذا كانت $د(س) = \frac{٣س}{س+١}$ فاوجد:
 ١) فترات التزايد والتناقص للدالة $د(س)$.
 ٢) القيم العظمى والصغرى المحلية إن وجدت.

اختبار ٨ - ٩ دور ثاني



٥) الشكل المجاور يمثل منحنى الدالة $د(س)$ ، فإذا كان متوسط معدل التغير يساوي -٤ عندما تتغير $س$ من ١ إلى ٣ فإن قيمة $ك$ تساوي:

- أ) ١١
 ب) ١٢
 ج) ١٣
 د) ١٤

٦) يتحرك جسم حسب العلاقة ع(ن) = ٣ن^٢ - ٢ن حيث ع: السرعة بالسنتيمتر/ الثانية ، ن: الزمن بالثواني، فإن التسارع اللحظي عند ٢ ثانية يساوي :

- (أ) ١٠ (ب) ٨ (ج) ٦ (د) ٤

٧) إذا كانت هـ (س) قابلة للاشتقاق على ح، ق (س) = ١ + هـ (س) حيث س ≠ ٠، هـ (١-) = ٢، هـ (١-) = ٣، فإن ق'(١-) تساوي :

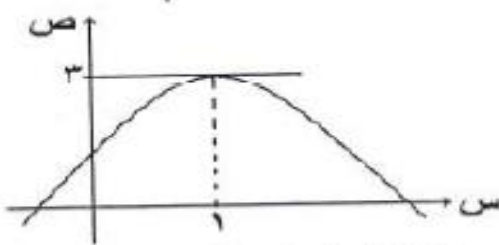
- (أ) ٦ (ب) ٢ (ج) ٢- (د) ٦-

٨) إذا كانت د'(س) = ٢س^٢، فإن $\frac{د'(س+١) - د'(س)}{١}$ =

- (أ) ٢س^٢ (ب) ٨س^٢ (ج) ٢٤س^٢ (د) ٤٨س

٩) إذا كانت ص - د(ع) ، ع = د(س) وكان $\frac{د(ع)}{ص} = ٤$ ، $\frac{د(ع)}{ص} = ٢$ ، فإن (ص هـ ع)'(س) =

- (أ) $\frac{١}{٨}$ (ب) $\frac{١}{٢}$ (ج) ٢ (د) ٨



١٠) إذا كان الشكل المجاور يمثل منحنى الدالة د(س) = س^١ + ب س + ج حيث ب ، ج ثوابت فإن قيمة ب تساوي :

- (أ) ٣ (ب) ١ (ج) ٢- (د) ٣-

١١) إذا كانت د(س) = (٢-س)^١ + ٢ فإن للدالة قيمة صغرى مطلقة في [-١، ٣] عند س تساوي:

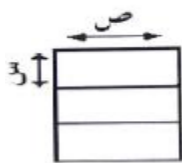
- (أ) ٣ (ب) ٢ (ج) صفر (د) ١-

١) يتم حصاد حبوب القمح من الحقول بواسطة الآلات ، فإذا كانت الحبوب تتساقط من فوهة إحدى الآلات بمعدل $\frac{\pi}{٣} م^٢ / د$ مكونة مخروط دائري قائم قطره يساوي ثلاثة أمثال ارتفاعه. أوجد معدل التغير في ارتفاع المخروط عندما يكون الارتفاع ٢ م .

(حجم المخروط = $\frac{١}{٣} \pi ر^٢ ع$)

٢) إذا كانت ص^٢ - ٥س + ص اثبت ص^٢ = $\frac{٥٠}{٢(ص-١)}$

إذا كانت د(س) = $\left. \begin{matrix} ٢س + ١ ، ١ < س \\ ١ + س ، س \leq ١ \end{matrix} \right\}$ متصلة على ح فأوجد د'(١) (المشتقة اليسرى) باستخدام التعريف.



صاحب مزرعة لديه سلك طوله ٦٠٠ م ، يريد أن يقسم به ثلاث مناطق زراعية مستطيلة الشكل ومتساوية المساحة في مزرعته كما هو موضح في الشكل .

أوجد أكبر مساحة للمنطقة الواحدة يمكن أن يستخدم فيها السلك .

١) فترات التزايد وفترات التناقص للدالة د(س) .

إذا كانت د(س) = $\frac{١}{٣} س^٣ - \frac{١}{٢} س^٢ - ٦س$ فأوجد : ٢) القيم العظمى والصغرى المحلية إن وجدت.